آمادگی برای

المپیادهای ریاضی

ترجمهٔ پرویز شهریاری

انتشارات فاطمی

آمادگی برای المپیادهای ریاضی برای کسانی تهیه شده است که علاقه‌مند به حل مسئله‌هایی متنوع، ساده و سرگرم کننده، و نامتعارف هستند.

مسئله‌های این کتاب از میان مسئله‌هایی برگزیده شده‌اند که استادان ریاضی اتحاد جماهیر شوروی، در سالهای گذشته، برای المپیادهای ریاضی داخلی و دانش‌آموزان سالهای آخر دبیرستان طرح و پیشنهاد کرده‌اند. مسئله‌ها در بخشهای جداگانهٔ کتاب تنظیم شده‌اند و در پایان هر بخش پاسخ یا راه‌حل آنها آمده است. راه‌حل هیچ مسئله‌ای از چارچوب برنامهٔ دبیرستانی خارج نیست.

ضمن حل مسئله‌ها، تلاش شده است تا با اشاره به مسئله‌های مشابه، بهره‌گیران از این کتاب به سمت نوعی قانونمندی کلّی راهنمایی شوند.

آمادگی برای
المپیادهای ریاضی

ترجمهٔ پرویز شهریاری

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

انتشارات فاطمی

آمادگی برای المپیادهای ریاضی
ЗАОЧНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

مؤلفان: ن. ب. واسیلیف / (Н. Б. ВАСИЛЬЕВ) و. ل. گوتنماخر (В. Л. ГУТЕНМАХЕР)
ژ. م. رابوت (Ж. М. РАББОТ) / آ. ل. توم (А. Л. ТООМ)

مترجم: پرویز شهریاری

چاپ دوم: ۴۰۰۰ نسخه، تابستان ۱۳۷۴

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ ستاره، قم

□

□

نشانی: تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶، خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۶۵۱۴۲۲_۶۵۴۷۷۰ ، فاکس ۸۸۶۶۲۵۸

این کتاب با استفاده از کاغذ حمایتی وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی به چاپ رسیده است.

به نام خدا

سخنی از ناشر

هرجامعهٔ به‌پا خاسته‌ای، برای دست‌یافتن به‌خودکفایی و گسستن هرگونه زنجیر وابستگی سیاسی و اقتصادی، تلاش می‌کند تا علم و دانش و صنعت و فن و هنر را درمیان همگان، به‌ویژه نوجوانان و جوانـان و دانشپژوهان، گسترش دهد. هر چند یك‌بار برنامه و محتوای نظام آموزشی را دگوگون می‌کند، کتابهای درسی را از دانشهای کهنه می‌پیراید و از میان یافته‌های نوین دانش‌بشری آنچه را سازندگان‌فردای جامعه به‌آنها نیازمندند براین کتابها می‌افزاید. علم‌را با عمل و دانستن را با اندیشیدن و به‌کار بستن می‌آمیزد. چنین جامعه‌ای برای هرگونه کتابی‌که دانشهای نو و تازه‌ترین یافته‌هـای دانشمندان و پژوهشگران به‌آنها راه یافته است، پایگاهی بس ارجمند می‌شناسد. می‌داندکه بسیار نکته‌هاست که کتاب درسی فرصتی نمی‌یابد تا به‌آنها بپردازد، یا افزونتر از اشاره‌هایی در این زمینه‌ها داشته باشد. تلاش می‌کند تـا دانش‌آموختگان به‌گونه‌ای بارآیند کـه برای زندگانی امروز و فردای خود و جـامعهٔ خویش کارآمدتر و مؤثرتر باشند و از خلق‌کردن و دست یـازیدن به هنرهـا و صنعتها و اختراعها و اکتشافها و سود بردن از دانستن برای بهتر زیستن باز نمانند.

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی، با توجه به‌این نیازها، رسالتی را برعهده گرفته است و در زمینه‌های گوناگون علم و کاربردهایش و دانشها ودانستنیها کتابهایی را منتشرمی‌کندکه پاسخگوی ذهنهای کنجکاو وجستجوگر برای‌دستیابی به‌دانشی بیشتر در زمینه‌ای خاص باشند. این کتابها هم‌خودآموزند، هم‌یاری‌دهنده به‌فهم زودتر و بهتر کتابهای درسی، هم‌آماده‌کنندهٔ دانش‌آموزان و دانشجویان بـرای موفقیت درآزمونهای گوناگون علمی، و هم راهنمای معلمان برای تدریس آن رشتهٔ علمی خاص.

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی برای تهیه و انتشار این‌گونه کتابها از بهترین و تازه‌ترین کتابهای علمی جهان استفاده می‌کند. در کار نوشتن و تألیف و ترجمهٔ آنها از همکاریهای زبده‌ترین کارشناسان و پژوهشگران کشورمان در زمینه‌های گوناگون علوم و راه و روش آموزش آنها بهره می‌گیرد، و تا آنجاکه میسر و ممکن است تلاش می‌کند تا اشتباه و لغزشی درآنها راه نیابد.

با انتشار این کتاب، اگر به اندکی از این رسالت در راه بازسازی جامعهٔ علمی کشورمان رسیده باشیم، خدای را سپاس می‌گوییم که خدمتی درخور جامعه‌ای بزرگ برعهده گرفته‌ایم، حتی اگر اندك باشد.

پیشگفتار

این کتاب برای کسانی تهیه شده است که علاقه‌مند به‌حل مسأله‌های نامتعارف‌اند. ضمن حل این مسأله‌ها، به‌دلیل وقت آزادی که برای کار با آن‌ها وجود دارد، نه‌تنها می‌توان نیروی خود را در پیدا کردن روش‌های گوناگون بررسی مسأله‌های نامتعارف آزمایش کرد و تکامل داد، بلکه راه برای مقایسهٔ آن‌ها با مسأله‌های خویشاوند و، همچنین، تعمیم آن‌ها بازاست و دانش‌آموز علاقه‌مند می‌تواند، بدون نگرانی از تمام شدن وقت، همهٔ جنبه‌های مختلف آن را مورد بررسی و کاوش قرار دهد. هدف کتاب هم، یاری رساندن به‌همین گونه فعالیت‌های خلاق ذهنی است.

در فصل اول کتاب، مسأله‌هایی جمع‌آوری شده‌است که از نظر مضمون متنوع و از نظر تنظیم، ساده و سرگرم کننده‌اند.

درهریك از پنج فصل بعدی، پس از طرح مسأله‌ها، ابتدا راه حل مقدماتی آن داده شده است، سپس در بسیاری موردها (و بعد از علامت ▽) آن را تعمیم داده‌ایم و گاهی (بعد از جملهٔ «**برای علاقه‌مندان**») زمینه‌های دشوارتری مورد بررسی قرار گرفته است که براساس اصطلاح‌های ریاضیات جدید است. درپایان هریك از این فصل‌ها، مسأله‌هایی برای کار مستقل خود دانش‌آموزان آمده است که، بعضی از آن‌ها، با مسأله‌های همان فصل خویشاوندند و بعضی دیگر تازگی دارند.

۱

مسأله‌هایی برای آشنائی اولیه

۱۰۱. آیا می‌توان در صفحهٔ کاغذی که از دفترچهٔ خود جدا کرده‌اید، سوراخی به‌وجودآوردکه بتوان‌آدم بزرگ سالی را ازآن عبورداد؟

۲۰۱. درمعادلهٔ $(x^۲+\ldots)(x+۱)=(x^۴+۱)(x+۲)$ یکی از عددها را پاك کرده‌اند و به‌جای‌آن «سه نقطه» گذاشته‌اند. اگربدانیم، یکی از ریشه‌های این معادله، برابرواحد است، این عدد را پیداکنید.

۳۰۱. توکا $\frac{۱}{۳}$ وقت خود را در مدرسه می‌گذراند، $\frac{۱}{۴}$ آن را والیبال بازی می‌کند، $\frac{۱}{۵}$ آن را نوار گوش می‌دهد، $\frac{۱}{۶}$ آن راتلویزیون تماشامی‌کند و $\frac{۱}{۷}$ آن را به حل مسأله‌های ریاضی می‌پردازد. آیا می‌توان این طور زندگی کرد؟

۴۰۱. چهار عدد را، دو به‌دو باهم جمع کرده‌ایم و شش عدد جدید

به‌دست‌آورده‌ایم. چهارعدد کوچکتر این شش‌مجموع‌را می‌شناسیم: ۱، ۵، ۸ و ۹. دو مجموع دیگر و خود چهار عدد اولیه را پیدا کنید.

۵۰۱. درطول یك‌سال، حداکثرچند جمعه می‌تواند وجود داشته باشد؟

۶۰۱. چهار دختر ـ کتایون، مژده، نسرین و سپیده ـ در یك کنسرت شرکت دارند. آن‌ها ترانه می‌خوانند. هر ترانه را سه دختراجرا می‌کنند. کتایون ۸ ترانه و بیش ازدیگران ونسرین ۵ ترانه وکمتر ازدیگران خواند. دراین کنسرت چند ترانه خوانده شده است؟

۷۰۱. سه‌نفر ـ سهراب، سروش و پیمان ـ چای می‌خورند. اگرسهراب ۵ فنجان چای بیشترمی‌نوشید، آن وقت به‌تعداد فنجان‌های دونفردیگرچای خورده بود؛ و اگـرسروش ۹ فنجان بیشتر صرف می‌کرد، آن وقـت تعداد فنجان‌های چای‌او به‌اندازهٔ دونفر دیگرمی‌شد. هریك ازاین افراد چندفنجان چای خورده‌اند و نام فامیل هـرکدام ازآن‌ها چیست، به شرطی‌که بدانیم، آقای پارسا چـای قندپهلو مـی‌خورد، تعداد فنجان‌های چای آقای تفرشی مضربی از۳ است وآقای کیوان ۱۱ فنجان چای خورده است؟

۸۰۱. شروین لوازم خودرا به‌انبارسپرد: کاناپه، چمدان، ساك‌دستی، قاب عکس، زنبیل، کارتون و سگ‌کـوچك. وزن کاناپه، بـه اندازهٔ وزن چمدان وساك دستی‌روی هم، ویا به‌اندازهٔ وزن قاب‌عکس وکارتون روی‌هم بود. قاب عکس، زنبیل و کارتون هم وزن‌اند، درضمن، هریك از آن‌ها از سگ سنگین‌ترند. موقع تحویل لوازم، شروین مدعی شد که سگ او عوض شده است. ضمن تحقیق، معلوم شد، اگروزن ساك یا چمدان را به‌وزن سگ اضافه‌کنیم، روی هم از وزن‌کاناپه بیشترمی‌شود. ثابت‌کنید، ادعای شروین درست است.

۹۰۱. موتورسیکلت سوار و دوچرخه سواری، دریك لحظه، از نقطهٔ A به‌سمت نقطهٔ B حرکت‌کردند. دوچرخه‌سواربعد ازپیمودن یك سوم راه، متوقف شد، و تنها وقتی حرکت دوبارهٔ خود را آغازکردکه موتورسیکلت‌سوار در نقطه‌ای که به انـدازهٔ یـك سوم راه به B مانده بـود، رسید.

موتورسیکلت‌سوار، راه‌خودرا ادامه‌دادو بعداز رسیدن بهB، بلافاصله برگشت. کدام یك زودترمی‌رسند: موتورسیکلت سوار به A یا دوچرخه‌سوار بهB؟

۰۱۰۵۰ طول ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه درمثلث قائم‌الزاویه‌ای، برابر a و b است. روی وتراین مثلث و دربیرون آن، مربعی به ضلع وتر ساخته‌ایم. فاصلهٔ رأس زاویهٔ قائمهٔ مثلث را تا مرکزاین مربع پیدا کنید.

۰۱۱۰۱ رحمان درطول بهار۲۵٪ لاغر، سپس، درطول تابستان ۲۰٪ چاق، درطول‌پائیز ۱۰٪ لاغر و درطول زمستان ۲۰٪ چاق می‌شود. رحمان درطول سال لاغرمی‌شود یا چاق، یا تغییری نمی‌کند؟

۰۱۲۰۱ ضمن سه‌روز، ۳۵۰۰۰ نامه به‌دفترمرکزی پست رسیده‌است. اگردر روزاول، به‌اندازهٔ دو برابر تعداد واقعی، نامه رسیده بود، آن‌وقت تعدادکل نامه‌ها در طول سه روز، برابرتوان پنجم اختلاف تعداد نامه‌های روزهای دوم و سوم می‌شد. درهرروز، چند نامه به‌دفترمرکزی پست رسیده است؟

۰۱۳۰۱ الف) کناردیواراطاق گردی به‌قطر۳ متر، حشره‌ای روی کف اطاق است. این حشره با پرش حرکت می‌کند وطول هرپرش او ۲ متراست. پرش را آغازمی‌کند. درچه نقطه‌هایی ازاطاق می‌تواند قرار گیرد.

ب) به‌همان پرسش باسخ بدهید، به‌شرطی‌که اطاق، مربعی شکل به ضلع ۲ مترباشد و حشره، درآغاز، دریکی از گوشه‌های اطاق باشد.

۰۱۴۰۱ مهرهٔ جدیدی را برای بازی شطرنج به‌نام «زرافه» درنظر می‌گیریم که به‌صورت Γ حرکت می‌کند: چهارخانه دریك جهت و پنج‌خانه درجهت دیگر. حداکثر چند زرافه می‌توان روی صفحهٔ شطرنج به‌نحوی قرارداد که هرکدام‌ازآن‌ها، هرقدرحرکت‌کند، نتواند روی دیگری قرارگیرد.

۰۱۵۰۱ چهارنوجوان ـ آلبرت، بهزاد، بهروز و جمشید، مسابقهٔ دو دادند. روز بعد، وقتی نتیجهٔ مسابقه را از آن‌ها پرسیدند، این پاسخ‌ها را شنیدند:

آلبرت: من نه‌اول شدم و نه‌آخر.

بهزاد: من‌آخر نشدم.
بهروز: من نفراول بودم.
جمشید: من نفرآخربودم.

می‌دانیم سه تا ازاین پاسخ‌ها درست و یکی نادرست است. پاسخ چه‌کسی نادرست است؟ نفراول چه‌کسی است؟

۰۱۶۰۱ دو شهر A و B به‌فاصلهٔ ۱۰ کیلومتر از یکدیگر، در کنار رودخانه‌ای واقع‌اند. برای کدام حالت باید وقت بیشتری صرف‌کرد: حرکت با قایق از A تا B و برعکس، یا حرکت با همان قایق، ۲۰ کیلومتر روی دریاچه؟

۰۱۷۰۱ بهرام دراسکی سریع‌تر از آزیتا وکندتر از توکا است. آن‌ها از یك نقطه، در یك زمان و در یك جهت روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کنند. وتنها وقتی می‌ایستند که هرسه نفردریك نقطه باشند. در این مدت، توکا ۱۳ بار از آزیتا جلوزده‌است. روی هم، چندبارملاقات دونفری پیش‌آمده است؟

۰۱۸۰۱ قالب فولادی ۱۹ × ۷۳ سانتی‌متر را روی کاغذ گذاشته‌ایم‌و به‌کمك‌مداد، مستطیلی باهمین طول وعرض روی کاغذ رسم‌کرده‌ایم. چگونه می‌توان با استفاده ازاین قالب و مداد، مرکزمستطیل را پیداکرد؟

۰۱۹۰۱. ثابت‌کنید، درهراجتماعی، می‌توان دونفررا پیداکردکه، تعداد آشناهای‌آن‌ها دراین اجتماع، با هم برابرباشد. (اگر A با B آشناست، B هم با A آشناست.)

۰۲۰۰۱ یك دنبالهٔ عددی را به‌ترتیب زیرساخته‌ایم: عدد اول را ۷ گرفته‌ایم، سپس، از عدد دوم به بعد، مجموع رقم‌های مجذور عدد قبلی به‌اضافهٔ واحد را قرارداده‌ایم؛ مثلاً، عدد دوم برابر ۱۴ می‌شود، زیرا $۴۹ = ۷^۲$ ودرنتیجه $۱۴ = ۱ + ۹ + ۴$؛ عددسوم برابر۱۷ می‌شود وغیره. هزارمین عدد این دنباله، چند است؟

۰۲۱۰۱ سه برادر ـ آرش، رامین وکاوه ـ دریك‌کلاس درس می‌خوانند. معلم متوجه شد، اگریکی ازآن‌ها دوبار ۴ یا دوبار ۳ پشت سرهم بگیرد،

درس خود را طوری ادامه می‌دهد که دفعهٔ بعد نمرهٔ ۳ بیاورد؛ اگر دوبار پشت سرهم نمرهٔ ۵ بیاورد، درس خواندن را رها می‌کند و دفعهٔ بعد نمرهٔ ۲ می‌آورد؛ اگردو نمرهٔ مختلف بیاورد، دفعهٔ بعد، نمرهٔ بیشتر را ازبین دو نمرهٔ قبلی می‌آورد. درابتدای نیم سال، آرش نمره‌های ۴ و ۵، رامین ۳ و ۲ و کاوه ۲ و ۴ گرفت. نتیجهٔ نمرهٔ هریك ازآن‌ها، دراین نیم‌سال چند می‌شود، به‌شرطی که در ۳۰ آزمایش شرکت کنند و نمرهٔ نتیجه، نزدیك‌ترین عدد درست به‌میانگین حسابی نمره‌های آن‌ها باشد؟*

۰۲۲۰۱ ریاضی‌دانی کنارجوی آب و درخلاف جهت حرکت آب به‌خانه می‌رفت، درحالی که کلاه‌خود ویك تکه چوب دردست داشت. سرعت حرکت او، یك برابرونیم سرعت حرکت آب بود. ضمن حرکت، کلاه‌خود را به آب انداخت (آن را با تکه‌چوب عوضی گرفته بود). ولی خیلی زود متوجه اشتباه خود شد، تکه چوب را به‌آب انداخت و با سرعت دو برابر سرعت قبلی به‌عقب برگشت، کلاه را ازآب گرفت وبلافاصله با همان سرعت اولیهٔ خود، به‌سمت خانه حرکت کرد، مثل این‌که هیچ اتفاقی نیفتاده است. ۴۰ ثانیه بعد ازآن‌که کلاه را از آب گرفته بود، به‌تکه چوبی برخورد که روی آب به‌طرف اومی‌آمد. اگراشتباه نمی‌کرد و تمام وقت را به‌جلو می‌رفت، چقدر زودتربه‌خانه می‌رسید؟

۰۲۳۰۱ آیا عدد درستی وجود دارد، به نحوی که اگر رقم سمت چپ آن را حذف کنیم، عدد حاصل: الف) ۵۷ بارکوچکترشود؛ ب) ۵۸ بار کوچکترشود؟

۰۲۴۰۱ ازشرکت کنندگان دریك دورمسابقهٔ شطرنج، $\frac{۱}{۴}$ افراد استاد بزرگ و بقیه استاد شطرنج‌اند. هردو شرکت‌کننده، یك بار با هم بازی می‌کنند. برای برد یك امتیاز، برای تساوی نیم امتیاز داده می‌شود و به بازنده امتیازی داده‌نمی‌شود. درپایان مسابقه‌ها، استادان، درمجموع ۱/۲ برابراستادان بزرگ امتیاز آوردند. تعداد استادان و تعداد استادان بزرگ

* درمدارس شوروی ۵ بیشترین نمره و ۲ کمترین نمره است.ـ م.

را پیدا کنید.

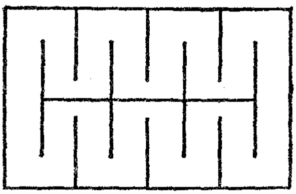
۰۲۵۰۱ آیا هرمی با قاعدهٔ چهارضلعی وجود دارد که دو وجه جانبی روبه‌رو درآن، برصفحهٔ قاعده عمود باشند؟

پاسخ و راهنمایی

مسألهٔ ۰۱۰۱ پاسخ: می‌توان. نمونه‌ای از روش کار، درشکل ۱ داده شده است. تعداد پیچ‌ها را می‌توان، بسته به‌اندازهٔ کلفتی کسی که می‌خواهد ازآن بیرون برود، بیشتریا کمتر کرد.

مسألهٔ ۰۲۰۱ پاسخ: ۲. برای پیداکردن عددپاک‌شده، کافی است $x = ۱$ را درمعادله قرار دهیم.

مسألهٔ ۰۳۰۱ مجموع ایـن عددها از واحـد بـزرگتراست. بنابـراین، به‌شرطی توکا می‌تواند به‌این ترتیب عمل کندکه قادرباشد بعضی کارها را دریک‌زمان وبا هم انجام دهد.



شکل ۱

مسألهٔ ۰۴۰۱ پاسخ: دو مجموع دیگر برابر۱۲و ۱۶ وخود عددها (۱ —)، ۲، ۶ و ۱۰ یا $\frac{۳}{۲}$—، $\frac{۵}{۲}$، $\frac{۱۳}{۲}$ و $\frac{۱۹}{۲}$.

مسألهٔ ۰۵۰۱ پاسخ: ۵۳. بین‌هرهفت روز متوالی، حتماً بـایـک‌جمعه برخورد می‌کنیـم. چون $۳۶۵ = ۵۲ \times ۷ + ۱$ و $۳۶۶ = ۵۲ \times ۷ + ۲$، بنابرایـن هرسال شامل ۵۲ هفته، به‌اضافهٔ ۱ یا ۲ روزاست. هرهفته شامل یك جمعه است و در۱ یا ۲ روز باقی مانده، ممکن است با جمعه برخـورد کنیم یا برخورد نکنیم. به این ترتیب، در سال حداکثر ۵۳ جمعه وجـود دارد. سالی شامـل ۵۳ جمعه است که با جمعه آغاز شود. در سال‌هـای کبیسه، اگر سال با پنجشنبه یا جمعه آغـاز شود، بـا ۵۳ جمعه برخورد خواهیم داشت.

مسألهٔ ۰۶۰۱ پاسخ: ۹ ترانه. اگربه‌خاطرهرترانه‌ای که اجرا می‌شود،

هدیه‌ای به اجراکنندگان آن بدهیم، تعداد هدیه‌ها، مضربی از ۳ خواهد بود.

مسألهٔ ۰۷۰۱ پاسخ: سهراب کیوان ۱۱ فنجان، سروش تفرشی ۹ فنجان، و پیمان پارسا ۷ فنجان چای نوشیده‌اند.

مسألهٔ ۰۸۰۱ وزن هریك از لوازم شروین را با یکی از حرف‌های الفبا نشان می‌دهیم:

وزن کاناپه: ك؛ وزن چمدان: چ؛ وزن ساك دستی: د؛ وزن قاب عکس (وهمچنین وزن زنبیل و وزن کارتون که با هم برابرند): ق؛ وبالاخره وزن سگ کوچك: س. اگر اعتراض شروین درست نباشد، باید داشته باشیم:

ك > د + س ، س > ق ، ۲ق = د + چ = ك

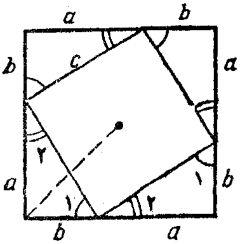
ك > چ + س

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

۲ق > ۲س > د + چ = ۲ق ، د > س ، چ > س

و تناقض روشن است.

مسألهٔ ۰۹۰۱ پاسخ: دوچرخه‌سوار زودتر می‌رسد. از آن‌جا که دوچرخه‌سوار، یك سوم راه را وقتی تمام می‌کند که هنوز موتورسوار نتوانسته است به‌پایان دو سوم راه برسد، بنابراین سرعت دوچرخه سوار، بیشتر از نصف سرعت موتورسوار است.



شکل ۲

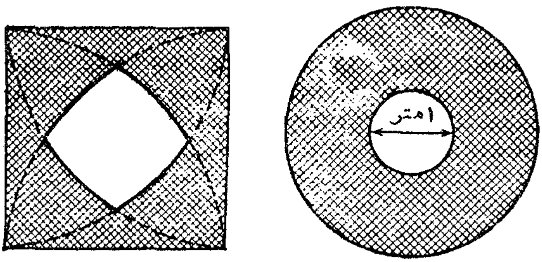
مسألهٔ ۰۱۰۰۱ پاسخ: $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$. روی همهٔ ضلع‌های مربع و در بیرون آن، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای برابر مثلث قائم‌الزاویهٔ مفروض، طوری می‌سازیم که ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ آن‌ها، در امتداد هم قرار گیرند (شکل ۲). ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ این مثلث‌ها مربع جدیدی می‌سازند که، مرکز آن، بر مرکز مربع قبلی منطبق است. فاصلهٔ مطلوب، برابر است با نصف قطر این مربع.

مسألهٔ ۰۱۱۰۱. پاسخ: لاغر می‌شود. اگر وزن را در ابتدای بهار M بگیریم، مقدار وزن درانتهای سال چنین می‌شود:

$$۰/۷۵ \times ۱/۲ \times ۰/۹ \times ۱/۲M = ۰/۹۷۲M$$

مسألهٔ ۰۱۲۰۱. پاسخ: به‌ترتیب ۲۴۰۴۹، ۵۴۷۱ و ۵۴۸۰ نامه در روزهای اول ، دوم و سوم به‌دفترپست‌رسیده است. تنها توان پنجم درستی که بین دوعدد ۳۵۰۰۰ و ۷۰۰۰۰ قراردارد، $۹^۵$ است.

مسألهٔ ۰۱۳۰۱. الف) پاسخ: همهٔ نقطه‌های حلقهٔ با قطر درونی ۱متر و قطربیرونی ۳ متر (در شکل «۳ـالف» این حلقه را هاشور زده‌ایم). روشن است که حشره، نمی‌تواند، به‌مرکزدایره، ازنیم‌مترنزدیك‌ترشود. برای اثبات این‌که حشره می‌تواند در هرنقطه ازاین حلقه قرار گیرد، ابتدا باید ثابت‌کرد که می‌تواند روی هرنقطهٔ کناردیوارقرار گیرد.



ب)　　　　الف)

شکل ۳

ب) پاسخ: شکل «۳ـب»، بخش هاشورخـورده را ببینید. این بخش، شامل مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های داخل مربع است، بـه‌استثنای اشتراك چهار دایرهٔ به‌شعاع ۲ متروبه مرکزگوشه‌های اطاق.

مسألهٔ ۰۱۴۰۱. پاسخ: ۱۶ زرافه. روی شکل ۴ نشان داده شده است که چگونه می‌توان ۸ زرافه را چید: هـر زرافه را می‌توان درخانه‌ای قرار دادکه شمارهٔ آن نوشته شده است. ۸زرافهٔ بقیه را می‌توان قرینهٔ هشت‌تای

۲	۳	۴	۵				
۳	۴	۵	۶				
۴	۵	۶	۷				
۵	۶	۷	۸				
				۱	۲	۳	۴
				۲	۳	۴	۵
				۳	۴	۵	۶
				۴	۵	۶	۷

شکل ۴

اول قرار داد.

مسألهٔ ۱۵۰۱. پاسخ: بهروز درست نگفته است؛ بهزاد بـه مقام اول رسیده است. اگرمثلاً فرض‌کنیم، آلبرت نـادرست‌گفته است، آن وقت او باید اول یا آخرشده باشد، ولی دراین صورت باید یا بهروز ویا جمشید هم پاسخ نادرست داده باشد؛ و این، فرض مسأله را مبنی براین‌که تنها یك‌نفر نادرست‌گفته است، نقض مـی‌کند. همهٔ حالت‌هـای دیگر را هم مـی‌توان به‌همین‌ترتیب مورد بررسی قرارداد.

مسألهٔ ۱۶۰۱. پاسخ: در رودخانه وقت‌بیشتری صرف می‌شود. سرعت قایق را u می‌گیریم وسرعت جریـان آب را v. اگر $u \leqslant v$، آن وقت قایق نمی‌تواند در جهت عکس جریان‌آب حرکت‌کند. ولی اگر $u > v > 0$، آن وقت، جواب مسأله، منجربه‌اثبات نابرابری زیرمی‌شود:

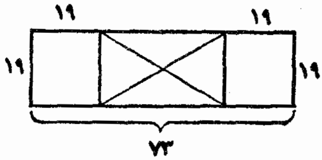
$$\frac{10}{u+v}+\frac{10}{u-v}>\frac{20}{u}$$

مسألهٔ ۱۷۰۱. پاسخ: ۲۵. این ۱۳ لحظه‌ای که توکا ازآزیتا جلو زده است، همهٔ زمان حرکت را به ۱۴ فاصلهٔ زمانی تقسیم می‌کند و درهریك از

این‌فاصله‌ها، توکا درست یك دور ازآزیتا جلوافتاده است. فرض‌کنید، بهرام k دور بیشتر از آزیتا حرکت‌کرده باشد (بنابر شرط مسأله $۰<k<۱۴$)؛ یعنی بهرام $k-۱$ باراز آزیتا جلو زده‌است. ولی بهرام $۱۴-k$ دورکمتر از توکا حرکت کرده است، بنابراین توکا $۱۳-k$ بار از او جلو زده است. روی‌هم به‌دست می‌آید:

$$۱۳+(k-۱)+(۱۳-k)=۲۵$$

مسألهٔ ۱۸۰۱. روی هریك ازضلع‌های‌بزرگترمستطیل، ازدوطرف، ۱۹ سانتی‌مترجدا مـی‌کنیم. مستطیلی ۱۹×۳۵ به‌دست می‌آیدکه مرکزآن، با مرکزمستطیل اصلی مشترك است. ولی درمستطیل اخیر می‌توان قطرها را رسم‌کرد ونقطهٔ برخوردآن‌ها، یعنی‌مرکزمستطیل را به‌دست‌آورد (شکل۵).



شکل ۵

مسألهٔ ۱۹۰۱. فرض کنید k نفر با هم جمع‌شده باشند. دراین صورت، تعدادآشناها برای هرفرد ازاین اجتماع ازصفرکمتر و از $k-۱$ بیشتر نیست. اگرفرض‌کنیم، تعداد آشناهای هرفرد، برای افراد مختلف، متفاوت باشد، به تناقض برمی‌خوریم. در واقع، در این صورت، بایدنفراول صفرآشنا، نفردوم یك آشنا، نفر سوم دو آشنا، ...، و سرانجام نفرآخر $k-۱$ آشنا داشته باشد. ولی این به‌معنای‌آن است‌که نفر آخربا همهٔ دیگران، ومنجمله بـا نفراول، آشناست؛ درحالی‌که بنابرفرض، نفراول با هیچ‌کس‌آشنا نیست.

مسألهٔ ۲۰۰۱. پاسخ: ۱۱. چندجمله ازاین دنباله را محاسبه می‌کنیم:

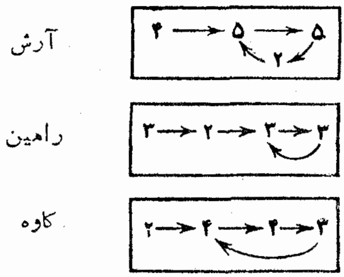
$$۷;۱۴;۱۷;۲۰;۵;۸;۱۱;۵;...$$

عدد ۵ تکرارشد، یعنی از آن بـه‌بعد، سه‌عدد ۵، ۸، ۱۱ بـه‌تناوب تکرار می‌شوند.

مسألهٔ ۲۱۰۱. پاسخ: آرش وکاوه نمرهٔ۴ و رامین نمرهٔ۳. اگرنمره‌های

هریك ازسه‌برادر را به ردیف بنویسیم، متوجه می‌شویم که، ازجایی به بعد، به‌صورت تناوبی، تکرار می‌شوند. طرح این نمره‌ها روی شکل ۶ داده شده است. با محاسبهٔ مقدارمتوسط نمره‌ها، جواب به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۲۲۰۱. پاسخ: دو دقیقه و نیم. فرض کنید، ریاضی‌دان، t ثانیه به‌طرف عقب بدود. دراین صورت، تکه چوب، $t+۴۰$ ثانیه را روی آب به‌عقب آمده است. سرعت جریان آب را v می گیریم. دراین صورت، سرعت حرکت ریاضی‌دان، درحالت عادی $۱/۵v$ و درحرکت به‌طرف‌عقب $۳v$ می‌شود. فاصله‌ای که او به طرف عقب دویده، برابراست با فاصله‌ای که تکه چوب تا لحظهٔ ملاقات با اوطی کرده، به‌اضافهٔ فاصله‌ای که ریاضی‌دان، همراه با کلاه خود، تا برخورد با تکه چوب پیموده است:



شکل ۶

$$۳vt=۱/۵v\times ۴۰+v(t+۴۰)$$

ازاین جا به‌دست می‌آید: $t=۵۰$.

ریاضی‌دان، برای گرفتن کلاه‌خود ازآب، ۵۰ ثانیه به‌طرف عقب دویده است؛ برای برگشت، همین‌فاصله را در ۵۰×۲ ثانیه طی کرده است (زیرا در برگشت به‌طرف خانه، همان‌سرعت نخستین خود، یعنی نصف سرعت دویدن به‌طرف عقب را داشته است). ریاضی‌دان، روی هم ۱۵۰ ثانیه وقت را، به‌خاطراشتباه خود، تلف کرده است.

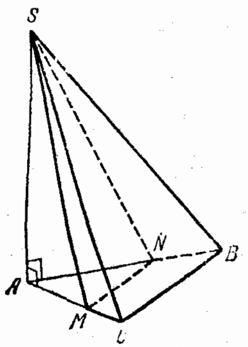
مسألهٔ ۲۳۰۱. پاسخ: الف) مثلاً عدد ۷۱۲۵؛ ب) چنین عددی وجود ندارد. رقم سمت چپ عدد را x، تعداد رقم‌های باقی مانده را k و عددی را که بعد ازحذف رقم سمت چپ باقی می‌ماند، y می گیریم. دراین صورت

$$x\times ۱۰^k+y=۵۸y \Rightarrow x\times ۱۰^k=۵۷y$$

سمت راست برابری اخیر مضربی از ۱۹ است، درحالی‌که سمت چپ آن نمی‌تواند بر۱۹ بخش‌پذیر باشد.

مسألهٔ ۰۲۴۰۱ پاسخ: ۹ استاد و ۳ استاد بزرگ. اگر تعداد شرکت‌کنندگان درمسابقه را n فرض کنیم، تعدادکل امتیازها برابر $\frac{1}{2}n(n-1)$ می‌شود.

مسألهٔ ۰۲۵۰۱ پاسخ: وجود دارد. نمونهٔ چنین هرمی، در شکل ۷ داده شده است. این هرم را، می‌توان به‌صورت زیر ساخت. هرم با قاعدهٔ مثلثی $SABC$ را درنظرمی‌گیریم که، درآن، یال جانبی SA برصفحهٔ قاعده عمود باشد. وجه‌های جانبی SAC و SAB برقاعده عمود می‌شوند (زیراز SA که‌عمودبرقاعده‌است، گذشته‌اند). اکنون، نقطه‌های دلخواه M و N را، به‌ترتیب، روی ضلع‌های AC و AB انتخاب می‌کنیم. هرم $SMNBC$، هرم مطلوب است.



شکل ۷

۲

عددهای درست و چندجمله‌ای‌ها

۱۰۲. به‌دانش‌آموزی ۲۰ مسأله داده‌اند. برای هرمسأله‌ای که درست حل کند ۸ نمره، برای هرمسأله‌ای که غلط حل کند ۵ نمرهٔ منفی و برای مسأله‌ای که حل نکند صفر نمره می‌گیرد. دانش‌آموز، درمجموع، ۱۳ نمره گرفته است. چند مسأله را، درست یا غلط، حل کرده است؟

۲۰۲. آیا می‌توان ۲۵ روبل را با اسکناس‌های یك روبلی، سه‌روبلی و پنج روبلی طوری معاوضه کرد که، روی هم، ۱۰ اسکناس داشته باشیم؟

۳۰۲. روی یك صفحهٔ کاغذ شطرنجی میلی‌متری، مستطیل ۲۰۴ × ۲۷۲ میلی‌متری را رسم کرده‌ایم (ضلع‌های مستطیل، برخط‌های راست شبکهٔ کاغذ، منطبق‌اند). قطر مستطیل را رسم کرده‌ایم وهمهٔ نقطه‌هایی راکه، این قطر، با گره‌های شبکه برخورد داشته است، علامت گذاشته‌ایم. این گره‌ها، قطر را به‌چند بخش تقسیم می‌کنند؟

۴۰۲. الف) از مستطیل ۱۴۱ × ۳۲۴ میلی‌متری، چند مربع به‌ضلع ۱۴۱ میلی‌متر جدا کرده‌ایم، تا وقتی که طول یکی از ضلع‌های مستطیل

باقی‌مانده، از ۱۴۱ میلی‌متر کمتر شود. سپس، از مستطیل باقی‌مانده، مربع‌هایی به‌ضلع برابر با ضلع کوچکتر مستطیل، تا جایی که ممکن است جدا کرده‌ایم و غیره. طول ضلع آخرین مربع، چقدر است؟

ب) عددهای a و b را طوری پیدا کنید، که بتوان از مستطیل $a \times b$، به‌ترتیبی که در بخش «الف» داشتیم، درست شش مربع با اندازه‌های مختلف جدا کرد.

۵۰۲. سه ماشین تحریر کامپیوتری، با خواندن دو عددی که روی یک کارت نوشته شده است، دو عدد دیگر را روی کارت دیگری ثبت می‌کنند. اگر کارتی با دو عدد $(m، n)$ به آن‌ها داده شود، اولی کارت $(m-n، n)$، دومی کارت $(m+n، n)$ و سومی کارت $(n، m)$ را به‌ما می‌دهند. فرض کنید، کارتی با دو عدد (۱۹، ۸۶) داشته باشیم. آیا می‌توان با استفاده از این سه ماشین تحریر کامپیوتری، به‌هر ترتیبی، کارت، الف) (۳۱، ۱۳)؛ ب) (۱۲، ۲۱) را به‌دست آورد؟

۶۰۲. استادکاری روی یک نوار طولانی، از آغاز آن، هر ۳۶ سانتی‌متر را با مداد آبی علامت می‌گذارد. استادکار دوم، روی همان نوار، و باز هم از آغاز آن، هر ۲۵ سانتی‌متر را با مداد قرمز علامت می‌گذارد. آیا ممکن است، در جایی، علامت آبی در یک سانتی‌متری علامت قرمز قرار گیرد؟

۷۰۲. آیا می‌توان زاویهٔ ۱۹ درجه را، به‌کمک پرگار و خط‌کش، به ۱۹ بخش برابر تقسیم کرد؟

۸۰۲. محیط دایره‌ای به وسیلهٔ ۲۰ نقطه، بـه ۲۰ بخش برابر تقسیم شده است. چند خط‌شکستهٔ بسته‌شامل ۲۰ پاره خط راست برابر، با رأس‌های در این نقطه‌ها، می‌توان ساخت؟ (خط‌های شکسته‌ای کـه، با دوران، برهم منطبق شوند، یکی به‌حساب می‌آیند.)

۹۰۲. آیا می‌توان از ۱۰۰ عدد درست دلخواه، الف) ۱۵ عدد؛ ب) ۱۶ عدد طوری انتخاب کرد کـه تفاضل هر دو عدد دلخواه از آن‌ها، بر ۷ بخش‌پذیر باشد؟

۲۰۱۰. ثابت کنید، اگرمجموع مجذورهای دوعدد درست بر۳ بخش‌پذیر باشد، هریك ازآن‌ها، بر۳ بخش‌پذیرخواهد بود.

۲۰۱۱. ثابت کنید، بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد، به نحوی که نمی‌توان هرکدام از آن‌ها را، به‌صورت مجموع مکعب‌های سه عدد درست غیرمنفی نوشت.

۲۰۱۲. کلاسی ۲۸ دانش‌آموزدارد که روی نیمکت‌های دونفری در ۱۴ ردیف نشسته‌اند. درابتدای هرماه، معلم، جای‌آن‌هارا طوری عوض می‌کند که هردو دانش‌آموزی که روی یك نیمکت قرارمی‌گیرند، قبل از آن، هرگز با هم در یك ردیف نبوده باشند. حداکثرتا چند ماه، معلم می‌تواند این‌عمل را انجام دهد؟

۲۰۱۳. سه‌عدد طبیعی متوالی طوری پیدا کنید که، هرکدام از آن‌ها، برمجذوریك عدد درست بزرگتراز واحد، بخش‌پذیرباشد.

۲۰۱۴. آیا می‌توان هر۱۲ عدد ۱، ۲، ...، ۱۲ را روی محیط دایره طوری قرار داد که برای هر سه عدد a، b و c که به همین ردیف در کنار یکدیگرند، عدد $b^۲-ac$ بر۱۳ بخش‌پذیرباشد؟

۲۰۱۵. آیا درست است که، برای هرعدد طبیعی n، عدد $n^۲+۵n-۱$ عددی اول است؟

۲۰۱۶. ثابت کنید، برای هرعدد درست n، عدد $n^۵-۵n^۳+۴n$ بر ۱۲۰ بخش‌پذیراست.

۲۰۱۷. آیا چند جمله‌ای $p(x)$ با ضریب‌های درست وجود دارد، به نحوی که

الف) $p(۰)=۱۹$، $p(۱)=۸۵$، $p(۲)=۱۹۸۵$؛

ب) $p(۱)=۱۹$، $p(۱۹)=۸۵$؟

۲۰۱۸. این چند جمله‌ای‌ها را تجزیه کنید (به‌عامل‌های با ضریب‌های درست):

الف) $x^{8}+x^{4}+1$ به‌سه‌عامل؛

ب) $x^{5}+x+1$ به‌دوعامل.

۱۹۰۲. به‌ازای چه‌مقدار a، چند جمله‌ای‌های

$$x^{4}+ax^{2}+1 \quad , \quad x^{3}+ax+1$$

ریشهٔ مشترك دارند؟

۲۰۰۲. مجموعهٔ M ازهمهٔ عددهای طبیعی به‌صورت $x^{2}+5y^{2}$ را درنظرمی‌گیریم (x و y، عددهای درستی هستند).

الف) ثابت کنید، حاصل ضرب هردوعدد M، خود عضوی از M است.

ب) عضوی از M را، عدد پایه می‌نامیم که از واحد بزرگتر باشد و، به‌جزخودش و واحد، برعدد دیگری ازعددهای M بخش‌پذیرنباشد. آیا عددهایی از M وجود دارندکه بتوان، هرکدام ازآن‌ها را، با دو روش مختلف به‌صورت حاصل‌ضرب عددهای پایه نوشت؟

ج) ثابت کنید، تعداد عددهای پایه بی‌نهایت است.

۲۱۰۲. به‌سادگی می‌توان سه‌عدد درست مجذورکامل پیداکرد که به تصاعد حسابی باشند: ۱، ۲۵، ۴۹. بازهم سه عدد از این گونه پیداکنید (ازمجذورهای کاملی که مقسوم علیه مشترك نداشته باشند).

۲۲۰۲. الف) در مجموعهٔ عددهای درست، ۷ جواب معادلهٔ زیر را پیداکنید:

$$y^{2}=6(x^{3}-x)$$

ب) ۴ جواب گویای دیگراین معادله را پیداکنید.

بحث و بررسی مسأله‌ها

مسألهٔ ۱۰۲. پاسخ: دانش‌آموز۱۳ مسأله را حل کرده است.

فرض می‌کنیم، تعداد مسأله‌هایی که درست حل شده است برابر x و

تعداد مسأله‌هایی که اشتباه حل شده است برابر y باشد. دراین صورت

$$8x-5y=13$$

که می‌توان، آن را، به‌این صورت نوشت:

$$8(x+y)=13(1+y)$$

می‌بینیم که $x+y$ باید بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد. ازطرف دیگر، $x+y$، از ۲۰ تجاوز نمی‌کند. بنابراین $x+y=13$ (درضمن $x=6$ و $y=7$).

▽ معادلهٔ $8x-5y=13$ را می‌توان به‌این ترتیب حل کرد: یکی ازجواب‌ها را می‌توان، بلافاصله، حدس زد: $x_0=1$، $y_0=-1$. به‌ازای هرعدد درست t، دوعدد $x=1+5t$، $y=-1+8t$ هم درمعادله صدق می‌کنند. در واقع

$$8(1+5t)-5(-1+8t)=(8+5)+(40t-40t)=13$$

درضمن $x+y=13t$ و چون $x+y\leqslant 20$، بنابراین

$$t=1,\ x+y=13,\ x=6,\ y=7$$

برای هرمعادلهٔ خطی به صورت $ax-by=c$ (a و b نسبت به‌هم اول‌اند)، صورت‌کلی‌جواب، در مجموعهٔ عددهای درست را، می‌توان با این طرح به‌دست‌آورد: یکی ازجواب‌های‌آن، (x_0,y_0) را پیدا می‌کنیم، دراین صورت $x=x_0+bt$، $y=y_0+at$ $(t\in\mathbf{Z})$، همهٔ‌جواب‌های‌درست معادله را به‌ما می‌دهد.

مسألهٔ ۲.۲. پاسخ: نمی‌شود.

فرض‌کنیم بتوان k عدد یك روبلی، l عدد سه روبلی و m عدد پنج روبلی را طوری انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$k+l+m=10\ ,\ k+3l+5m=25$$

اگربرابری اول را ازبرابری دوم کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$2l+4m+15$$

ولی، این برابری ممکن نیست، زیرا سمت چپ آن عددی زوج و سمت راست آن عددی فرد است. به‌این ترتیب، فرض ما نادرست است.

▽ به‌طورکلی، معادلهٔ به‌صورت $ax-by=c$، تنها وقتی در مجموعهٔ عددهای درست، جواب داردکه c بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد a و b بخش‌پذیرباشد. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد درست a و b را، با $(a، b)$ نشان می‌دهند.

در مسألهٔ ۲.۲، عدد $c=$ ۱۵، بر ۲ $=($۲، ۴$)=(a، b)$ بخش‌پذیر نیست.

مسألهٔ ۳.۲. پاسخ: به ۶۸ بخش.

هر یك از دو ضلع مجاور مستطیل را به ۶۸ بخش برابرتقسیم و از نقطه‌های تقسیم، خط‌های راستی روی خط‌های شبکه رسم می‌کنیم. در این صورت، قطر مستطیل به وسیلهٔ گره‌های شبکه به‌۶۸ بخش برابرتقسیم می‌شود که، هر کدام از آن‌ها، قطر مستطیلی با بعدهای ۴ × ۳ میلی‌متر را تشکیل می‌دهد. روی قطر چنین مستطیلی، حتی یك گره از شبکه هم وجود ندارد.

▽ به‌طورکلی، قطر یك مستطیل $m\times n$، به‌وسیلهٔ گره‌های شبکه، به $(m،n)$ بخش برابرتقسیم می‌شود [$(m،n)$، به‌معنای بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد m و n است].

مسألهٔ ۴.۲. الف) پاسخ: ۳ میلی‌متر.

به‌این تقسیم‌های باقی‌مانده توجه کنید:

(۲ مربع به‌ضلع ۱۴۱ میلی‌متر)	۳۲۴ = ۱۴۱ × ۲ + ۴۲
(۳ مربع به‌ضلع ۴۲ میلی‌متر)	۱۴۱ = ۴۲ × ۳ + ۱۵
(۲ مربع به‌ضلع ۱۵ میلی‌متر)	۴۲ = ۱۵ × ۲ + ۱۲
(۱ مربع به‌ضلع ۱۲ میلی‌متر)	۱۵ = ۱۲ × ۱ + ۳
(۴ مربع به‌ضلع ۳ میلی‌متر)	۱۲ = ۳ × ۴

▽ برای مستطیل $a\times b$، طـول ضلع کوچکترین مربع، برابراست با $(a،b)$.

در واقع، تقسیم‌های با بـاقی مانده‌ای که، بـرای حل مسأله، انجام دادیم، همان روندی است که در روش تقسیم‌های متوالی (آلگوریتم اقلیدس) برای پیداکردن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك بین دوعدد به‌کارمی‌رود.

آلگوریتم اقلیدس، براساس این گزاره قراردارد: اگر $a=bq+r$، آن وقت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b، برابراست با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك b و r: $(a،b)=(b،r)$. خود آلگوریتم را می‌توان این طور شرح داد. اگردوعدد a و b داده شده باشد و، درضمن $a>b>0$، آن‌وقت، ابتدا a را بر b تقسیم می‌کنیم تا به‌باقی ماندهٔ r_1 برسیم $(0\leqslant r_1<b)$. بعد b را بر r_1 تقسیم می‌کنیم تا به‌باقی‌ماندهٔ r_2 برسیم $(0\leqslant r_2<r_1)$. سپس، r_1 را بر r_2 تقسیم می‌کنیم تـا باقی ماندهٔ r_3 بـه‌دست‌آید $(0\leqslant r_3<r_2)$، وغیره، تا وقتی که، مثلاً، باقی‌ماندهٔ r_{n-1} برباقی ماندهٔ r_n بخش‌پذیرباشد، یعنی $r_{n+1}=0$. آخرین باقی‌ماندهٔ غیرصفر r_n، همان بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b است. در واقع

$$r_n=(r_n،r_{n-1})=(r_{n-1}،r_{n-2})=\ldots=(r_2،r_1)=(r_1،b)=(a،b)$$

درمسألهٔ ۴.۲، الف) باتعبیرهندسی آلگوریتم اقلیدس روبه‌روهستیم.

همچنین یادآوری می‌کنیم که به وسیلهٔ خارج قسمت‌های متوالی q_1، q_2، ...، q_n، که ضمن به‌کاربردن آلگوریتم اقلیدس به‌دست می‌آیند، می‌توان تبدیل کسر $\frac{a}{b}$ را به‌صورت کسرمسلسل نوشت:

$$\frac{a}{b}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cdots+\cfrac{1}{q_n}}}$$

ب) پاسخ: به‌عنوان مثال $a=۲۱$، $b=۱۳$.

در واقع، اگر تقسیم‌های متوالی را انجام دهیم، داریم:

$$۲۱=۱\times۱۳+۸;\quad ۱۳=۱\times۸+۵;\quad ۸=۱\times۵+۳;$$

$$۵=۱\times۳+۲;\quad ۳=۱\times۲+۱;\quad ۲=۲\times۱$$

به‌این ترتیب، مربع‌هایی، به‌ترتیب با ضلع‌های ۱۳، ۸، ۵، ۳، ۲ و ۱ به‌دست می‌آیند: شش مربع با طول ضلع‌های مختلف.

▽ برای عدد طبیعی و دلخواه n، می‌توان عددهای a و b را طوری پیدا کرد که، ضمن تقسیم مستطیل $a\times b$، درست n مربع با اندازه‌های مختلف به‌دست آید.

به‌عنوان این عددها، می‌توان عددهای $F_{n+۲}$ و $F_{n+۱}$ از دنبالهٔ عددهای فیبوناچی را درنظر گرفت. این دنباله، به‌این ترتیب تعریف می‌شود:

$$F_۱=۱،\ F_۲=۱،\ F_۳=۲،\ldots،F_k=F_{k-۱}+F_{k-۲}(k\geqslant۳)$$

اگر فرض کنیم $a=F_{n+۲}$ و $b=F_{n+۱}$، آن‌وقت هربار از مستطیل $F_k\times F_{k-۱}$، تنها یک مربع به ضلع $F_{k-۱}$ جدا می‌شود و مستطیل $F_{k-۱}\times F_{k-۲}$ باقی می‌ماند.

درحل مسألهٔ ۴.۲، ب) $F_۷=۱۳$ و $F_۸=۲۱$ را درنظر گرفتیم و اندازهٔ شش مربع حاصل، برابر با شش عدد مختلف اولیه در دنبالهٔ فیبوناچی شد: ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳.

نمونهٔ مستطیل $a\times b$ که به این ترتیب ساخته شود، کوچکترین مستطیل ممکن، از نظر اندازه‌هاست (برای n مفروض)؛ به‌زبان دیگر، اگر عددهای a و b از $F_{n+۲}$ بزرگتر نباشند، آن وقت برای پیدا کردن $(a،b)$ به‌کمك آلگوریتم اقلیدس، بیش از n گام لازم نیست.

همچنین یادآوری می‌کنیم که، برای تبدیل نسبت $\frac{F_{n+۱}}{F_n}$ از دو عدد مجاور فیبوناچی، به‌کسر مسلسل، روش بسیار ساده‌ای وجود دارد: این کسر، تنها از واحدها تشکیل شده است، مثلاً

$$\frac{F_6}{F_5}=\frac{8}{5}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}$$

مسألهٔ ۵۰۲. الف) پاسخ: می‌توان.

عمل ماشین تحریرهای کامپیوتری را، به‌ترتیب I، II و III می‌نامیم. درضمن I^n یا II^n را به معنای n بارمتوالی عمل I یا II می گیریم. دراین صورت، کارت (۳۱،۱۳) را می‌توان، به‌این ترتیب، ازکارت (۱۹،۸۶) به‌دست‌آورد:

$$(19,86)\xrightarrow{III}(86,19)\xrightarrow{I^4}(10,19)\xrightarrow{III}(19,10)\xrightarrow{I}$$
$$\xrightarrow{I}(9,10)\xrightarrow{III}(10,9)\xrightarrow{I}(1,9)\xrightarrow{III}(9,1)\xrightarrow{I^7}$$
$$\xrightarrow{I^7}(2,1)\xrightarrow{III}(1,2)\xrightarrow{II}(3,2)\xrightarrow{III}(2,3)\xrightarrow{II}$$
$$\xrightarrow{II}(5,3)\xrightarrow{III}(3,5)\xrightarrow{II^2}(13,5)\xrightarrow{III}(5,13)\xrightarrow{II^2}(31,13)$$

ب) نمی‌توان.

چون عمل‌های I، II و III، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد m و n را تغییرنمی‌دهند، و چون ۱۹ و ۸۶ نسبت به‌هم اول‌اند درحالی‌که ۱۲ و ۲۱ مقسوم‌علیه مشترکی برابر ۳ دارند، بنابراین ازکارت (۱۹،۸۶) نمی‌توان به‌کارت (۱۲،۲۱) رسید.

∇ شرط لازم‌وکافی برای این‌که بتوان ازکارت (m,n) به‌کارت (a,b) رسید، این است که بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك دوعدد m و n بابزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد a و b برابرباشد.

لازم بودن شرط روشن است: عمل‌های I، II و III، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك را تغییرنمی‌دهند.

اگراین شرط برقرارباشد، یعنی بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد

a و b، با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد m و n یکی باشد، آن‌وقت هردوکارت را، می‌توان باعمل‌های I و III وبا توجه به آلگوریتم اقلیدس، به‌کارت (d,d) تبدیل کرد [d، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b یا m و n است].

در واقع، هرگام آلگوریتم اقلیدس، عبارت است ازتقسیم با باقی‌ماندهٔ عدد a برعدد b: $a=bq+r$ $(0\leqslant r<b)$. ایـن گام را می‌توان این‌طور نشان داد:

$$(a,b)\xrightarrow{\mathrm{I}^q}(r,b)$$

سپس، بعد از عمل $(r,b)\xrightarrow{\mathrm{III}}(b,r)$ می‌توان به همین‌ترتیب، گام بعدی را برداشت و غیره، تا وقتی‌که به‌کارت (d,d) برسیم.

به‌این‌ترتیب، اگر زنجیرهٔ عمل‌های $(d,d)\rightarrow\ldots\rightarrow(a,b)$ را، با تبدیل‌عمل I به‌عمل II، درجهت عکس انجام دهیم، ازکارت (d,d) به‌کارت (a,b) می‌رسیم.

بنابرایـن، ابتدا از (m,n) «بـه‌پایین» بـه‌طرف (d,d) و، سپس، از (d,d) «به‌بالا» به‌طرف (a,b) می‌رویم و، به‌این‌ترتیب، ازکارت (m,n)، کارت (a,b) را به‌دست می‌آوریم.

مسألهٔ ۶۰۲. پاسخ: می‌توان.

مثلاً نهمین علامت‌آبـی و سیزدهمین علامت قـرمز، فاصله‌ای برابر یك سانتی‌متردارند، زیرا

$$۱۳\times۲۵-۹\times۳۶=۱$$

∇ دراین مسأله، در واقع بـاید، جوابی از یکی ازدومعادلهٔ زیر را، درمجموعهٔ عددهای درست، پیداکرد:

$$۲۵x-۳۶y=۱,\ ۲۵x-۳۶y=-۱$$

ویا ثابت‌کرد، چنین جوابی وجود ندارد.

اگر a و b نسبت به‌هم اول باشند، همیشه می‌توان جواب معادلهٔ $ax+by=۱$ را، درمجموعهٔ عددهای درست، پیداکرد. روشی را که برای پیداکردن این جواب وجود دارد، روی مسألهٔ خود نشان می‌دهیم. همهٔ گام‌های لازم را، برای تعیین بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد ۳۶ و ۲۵ برمی‌داریم:

$$۳۶=۲۵\times۱+۱۱;\ \ ۲۵=۱۱\times۲+۳;\ \ ۱۱=۳\times۳+۲;$$
$$۳=۲\times۱+۱$$

این ردیف برابری‌ها را این طورمی‌نویسیم:

$$۱۱=۳۶-۲۵\times۱;\ \ ۳=۲۵-۱۱\times۲;\ \ ۲=۱۱-۳\times۳;$$
$$۱=۳-۲\times۱$$

دراین صورت، داریم:

$$۱=۳-(۱۱-۳\times۳)=۳\times۴-۱۱=$$
$$=(۲۵-۱۱\times۲)\times۴-۱۱=۲۵\times۴-۱۱\times۹=۲۵\times۴-$$
$$-(۳۶-۲۵)\times۹=۲۵\times۱۳-۳۶\times۹$$

بنابراین، به‌برابری $۲۵\times۱۳-۳۶\times۹=۱$ می‌رسیم که معرف جواب (۱۳،۹) برای معادلهٔ $۲۵x-۳۶y=۱$ می‌باشد.

مسألهٔ ۰۷۰۲. پاسخ: می‌توان.

دایره‌ای به‌مرکزرأس زاویهٔ مفروض‌رسم‌می‌کنیم. ضلع‌های این‌زاویه، کمانی برابر ۱۹ درجه ازمحیط دایره جدا می‌کنند.

اگربه‌کمك پرگار، اندازهٔ این‌کمان را ۱۸ بارمتوالی روی محیط‌دایره منتقل‌کنیم، چون $۱۹\times۱۹=۳۶۱$، بنابراین انتهای‌آخرین‌کمان به‌فاصلهٔ یك درجه ازابتدای نخستین‌کمان قرارمی‌گیرد. اکنون، اگر این‌کمان یك درجه را، ۱۷ باربه‌کمك پرگارپشت سرهم روی کمان اولیه منتقل‌کنیم، کمان ۱۹ درجه به ۱۹ بخش برابرتقسیم خواهد شد. با وصل این نقطه‌های

تقسیم به رأس زاویه، تقسیم زاویهٔ ۱۹ درجه به ۱۹ بخش برابر به دست می‌آید.

∇ m و n را دوعدد طبیعی مـی‌گیریم که نسبت به‌هم اول باشند و، درضمن، $m<n$. اکنون، اگر روی محیط دایـره، به‌دنبال هم، کمان‌هایی برابر $\frac{m}{n}$ محیط دایره را جدا کنیم، می‌توان بعد از n گام، همهٔ رأس‌های n ضلعی منتظم محاط در دایره را به‌دست‌آورد (که درضمن، همهٔ گام‌ها، در m دورکامل برداشته می‌شود). دریـکی از گام‌ها، ومثلاً گام xام، به رأسی می‌رسیم که درهمسایـگی آغازحرکت است؛ درضمن وقتی کـه مثلاً y دور کامل حرکت کنیم، به‌بخش $\frac{1}{n}$ محیط دایره می‌رسیم، به‌نحوی که

$$x.\frac{m}{n}=y+\frac{1}{n}$$

ازاین جا، روش هندسی حل معادلهٔ

$$xm-yn=1$$

درمجموعهٔ عددهای درست به‌دست می‌آید. درمسأله ما داریم:

$$m=19،\ n=360،\ x=19،\ y=1$$

مسألهٔ ۸۰۴. پاسخ: ۴ خط شکسته.

با آغازازیکی ازنقطه‌های تقسیم، آن‌ها را درجهت حرکت‌عقربه‌های ساعت، شماره‌گذاری می‌کنیم: ۱، ۲، ۳، ...، ۲۰.

خطهای شکسته با تعداد ضلع‌های برابر به‌این طریق به‌دست می‌آیند که، پشت‌سرهم، هرنقطه را به‌نقطهٔ kام بعدازآن وصل کنیم وآن قدر ادامه دهیم تا به‌نقطهٔ اولیهٔ ۱ برسیم.

به‌ازای $k=1$، بیست ضلعی منتظم محاط دردایره به‌دست می‌آیدکه، رأس‌های آن را، نقطه‌های ۱، ۲، ۳، ...، ۲۰ تشکیل می‌دهند.

به ازای $k=2$، یك ده ضلعی منتظم با رأس‌های ۱، ۳، ۵، ...، ۱۹،

به‌دست می‌آید.

به‌ازای $k = ۳$، خط شکستهٔ بسته‌ای با ۲۰ رأس به‌دست می‌آید که خودش راقطع می‌کند و رأس‌های‌آن را، نقطه‌های ۱، ۴، ۷، ۱۰، ۱۳، ۱۶، ۱۹، ۲، ۵، ۸، ۱۱، ۱۴، ۱۷، ۲۰، ۳، ۶، ۹، ۱۲، ۱۵و ۱۸ تشکیل می‌دهند.

به‌ازای $k = ۴$، یك پنج ضلعی منتظم به‌دست می‌آید.

به‌ازای $k = ۵$، یك مربع خواهیم داشت.

به ازای $k = ۶$، خط شکستهٔ بسته‌ای با ۱۰ رأس به‌دست می‌آید که خودش را قطع می‌کند و رأس‌آن درنقطه‌های ۱، ۷، ۱۳، ۱۹، ۵، ۱۱، ۱۷، ۳، ۹ و ۱۵ قراردارند.

به‌ازای $k = ۷$، خط شکسته‌ای با ۲۰ ضلع به‌دست می‌آید.

به‌ازای $k = ۸$، خط شکسته‌ای با پنج ضلع (ستارهٔ پنج‌پر).

به‌ازای $k = ۹$، دوباره یك خط شکستهٔ ۲۰ ضلعی.

به‌ازای $k = ۱۰$، دوپاره‌خط راست منطبق برهم به‌دست می‌آید.

به‌ازای $k = ۱۱$، همان خط شکسته‌ای به دست می‌آیدکه به‌ازای $k = ۹$ به‌دست‌آمده بود، زیرا وصل ۱۰ نقطه درمیان درجهت حرکت عقربه‌های‌ساعت باوصل ۸ درمیان درخلاف‌جهت حرکت عقربه‌های ساعت، یکی است.

به‌همین ترتیب، به ازای $k = ۱۲، ۱۳، ...، ۱۹$، به‌همان خطهای شکسته‌ای می‌رسیم که به‌ازای $k = ۸، ۷، ...، ۱$ به‌دست‌آورده بودیم.

به‌این ترتیب، تعداد خطهای شکستهٔ ۲۰ ضلعی مختلف، برابر چهار است، و به‌ازای $k = ۱، ۳، ۷، ۹$ به‌دست می‌آیند.

▽ اگر n نقطه را روی محیط دایره در نظر بگیریم، آن وقت، تعداد خطهای شکستهٔ بسته‌ای‌که دارای n ضلع برابرباشند و رأس‌های آن‌ها در این n نقطه قرار گرفته باشد، برابر است با تعداد عددهای طبیعی‌کوچکتر از $\frac{n}{۲}$ که نسبت به n اول باشند.

تعداد عددهای طبیعی کوچکتر از n را، که نسبت به n اول باشند، معمولاً با $\varphi(n)$ نشان می‌دهند. تابع $\varphi(n)$ را، تابع اویلر گویند. اگر p_1، p_2، ...، p_l را همهٔ عددهای اولی فرض کنیم که از تجزیهٔ عدد n به‌دست می‌آیند، آن وقت

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)$$

پاسخ مسألهٔ ۸.۲، درحالت تعمیم یافتهٔ آن چنین است: تعداد خطهای شکستهٔ بسته و منتظم مختلف، برابر است با $\frac{1}{2}\varphi(n)$. در حالت خاص $n=20$ داریم:

$$\varphi(20)=20\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=8 \ , \ \frac{1}{2}\varphi(20)=4$$

مسألهٔ ۹.۲. الف) پاسخ: می‌توان.

تفاضل دو عدد، وقتی و تنها وقتی بر ۷ بخش‌پذیر است که هردو عدد، در تقسیم بر ۷، به‌باقی مانده‌های برابر برسند. در تقسیم بر ۷، هفت حالت ممکن برای عدد باقی مانده وجود دارد: ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶.

فرض می‌کنیم، نتوانیم ۱۵ عدد مورد نظر را از بین ۱۰۰ عدد انتخاب کنیم. دراین صورت باید حداکثر ۱۴ عدد وجود داشته باشد که در تقسیم بر ۷ به‌باقی ماندهٔ صفر برسند، حداکثر ۱۴ عدد وجود داشته باشد که در تقسیم بر ۷ به‌باقی ماندهٔ واحد برسد، و به‌همین ترتیب، برای باقی مانده‌های ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶. ولی آن وقت، حداکثر 7×14، یعنی ۹۸ عدد خواهیم داشت؛ به‌این ترتیب، فرض ما درست نیست.

∇ مسألهٔ ۹.۲، الف) را می‌توان مثال خوبی از کاربرد اصل دیریکله دانست: اگر در n لانه، $nk+1$ کبوتر جا گرفته باشند، دست‌کم در یکی از لانه‌ها، $k+1$ کبوتر وجود دارد.

در واقع، اگر در هر لانه بیش از k کبوتر نباشد، آن وقت، تعداد

کبوترها از nk بیشتر نمی‌شود. اصل دیریکله را، اصل لانه‌کبوتری هم می‌گویند.

ب) پاسخ: همیشه نمی‌توان.

مثال مشخص، عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ می‌باشد. بین این عددها، ۱۴ عدد ۷، ۱۴، ...، ۹۸ درتقسیم بر ۷ به‌باقی ماندهٔ صفرمی‌رسند، ۱۵ عدد باقی مانده‌ای برابر ۱ و ۲ می‌دهند، ۱۴ عدد باقی مانده‌ای برابر ۳، ۴، ۵، و ۶ می‌دهند. به این ترتیب، در بین این ۱۰۰ عدد نمی‌توان ۱۶ عدد پیدا کرد که درتقسیم بر۷، به‌باقی مانده‌های برابر برسند.

مسألهٔ **۱۰۵۲.** هرعدد درستی یا بر۳ بخش‌پذیراست ویا درتقسیم بر ۳ به‌یکی از باقی مانده‌های ۱ یا ۲ می‌رسد.

اگرعدد n بر۳ بخش‌پذیرباشد، می‌توان آن را به صورت $n=۳k$ نوشت، بنابراین مجذور آن، به صورت $۹k^۲$ درمی‌آید که بر ۳ بخش پذیر است.

اگرعدد n، درتقسیم بر۳، به‌باقی‌ماندهٔ ۱ برسد، می‌توان‌آن‌را به‌صورت $n=۳k+۱$ نوشت و، در نتیجه، مجذور آن به‌صورت

$$n^۲=۳(۳k^۲+۲k)+۱$$

درمی‌آید. دیده می‌شود که، دراین حالت، مجذور عدد هم، درتقسیم بر۳، به‌باقی ماندهٔ ۱ می‌رسد.

اگردرتقسیم عدد n بر۳، باقی مانده‌ای برابر۲ داشته باشیم، به‌دست می‌آید:

$$n^۲=۳(۳k^۲+۴k+۱)+۱$$

یعنی، در این حالت هم، در تقسیم مجذور عدد n بر۳، به باقی ماندهٔ ۱ می‌رسیم.

به‌این ترتیب، درحالتی‌که تنها یکی از دوعدد بر ۳ بخش‌پذیرنباشد، آن وقت‌مجموع مجذورهای دوعدد، درتقسیم بر۳، به‌باقی‌ماندهٔ ۱ می‌رسد؛ و اگرهیچ کدام ازدوعدد بر۳ بخش‌پذیرنباشد، مجموع مجذورهای‌آن‌ها، در تقسیم بر۳، به‌باقی ماندهٔ ۲ می‌رسد. بنابراین، مجموع مجذورهای دوعدد،

تنها وقتی بر ۳ بخش‌پذیر است که، هر کدام از آن‌ها، بر ۳ بخش‌پذیر باشند.

∇ عبور از عددهای درست، به باقی مانده‌های آن‌ها در تقسیم بر عدد درست مشخصی مثل m، روش اصلی حل مسأله‌های مربوط به بخش‌پذیری را تشکیل می‌دهد. درضمن، همیشه از قانون سادهٔ زیر استفاده می‌شود: برای پیدا کردن باقی ماندهٔ تقسیم مجموع یا حاصل‌ضرب دو (یا چند) عدد درست بر m، کافی است همین عمل‌ها را روی باقی مانده‌ها انجام دهیم، تا باقی ماندهٔ مجموع یا حاصل‌ضرب بر m به‌دست آید.

مثلاً، ثابت می‌کنیم که، حکم مسألهٔ ۱۰.۲، درحالتی هم که به‌جای عدد ۳، عدد ۷ را در نظر بگیریم، درست است. اگر عددهای از ۰ تا ۶ را مجذور کنیم، قانع می‌شویم که در تقسیم مجذور یک عدد درست بر ۷، تنها باقی مانده‌های ۰، ۱، ۲ و ۴ به‌دست می‌آید. چون مجموع هیچ دو عددی از این چهار عدد، به‌جز ۰ و ۰، بر ۷ بخش‌پذیر نیست، بنابراین، مجموع مجذورهای دو عدد درست، تنها وقتی بر ۷ بخش‌پذیر است که خود آن دو عدد بر ۷ بخش‌پذیر باشند.

برای علاقه‌مندان. این مسأله که، برای عدد اول ومفروض p، مجموع مجذورهای دو عدد درست x^2+y^2 بر p بخش‌پذیر است، به‌شرطی که هیچ کدام از دو عدد x و y بر p بخش‌پذیر نباشند، با مسألهٔ زیر هم‌ارز است:

آیا عددی پیدا می‌شود که درهم نهشتی مجذور آن به مدول p، برابر (۱ −) باشد، یعنی آیا عدد z وجود دارد، به نحوی که $1+z^2$ بر p بخش‌پذیر باشد؟

پاسخ این مسأله (که متعلق به اویلر است)، چنین است: برای عددهایی از p، که به‌صورت $4k+1$ باشند (۵، ۱۳، ۱۷، ۲۹، ...) ممکن است و برای $p=4k+3$ (۳، ۷، ۱۱، ۱۹، ۲۳، ...) ممکن نیست.

مسألهٔ ۱۱.۲. ثابت می‌کنیم، هرعددی که به صورت $9n+4$ $(n\in\mathbb{N})$ باشد، نمی‌تواند به‌صورت مجموع مکعب‌های سه عدد غیرمنفی نوشته شود. چون، تعداد این گونه عددها بی‌نهایت است، از این‌جا می‌توان درستی حکم مسأله را نتیجه گرفت.

اگر l عدد درستی باشد، هر عدد درست را می‌توان به‌صورت $3l$، یا $3l+1$ ویا $3l-1$ نوشت. بنابراین، مکعب هرعدد درست، یا به صورت $27l^3$ درمی‌آید ویا به‌صورت

$$27l^3 \pm 27l^2 + 9l \pm 1 = 9(3l^3 \pm 3l^2 + l) \pm 1$$

یعنی، مکعب هرعدد درست یا به‌صورت $9m$ است ویا به‌صورت $9m \pm 1$.

اگرهمهٔ ترکیب‌های ممکن را درنظربگیریم، به‌این نتیجه می‌رسیم که، مجموع مکعب‌های سه‌عدد درست، به‌یکی ازصورت‌های زیردرمی‌آید:

$$9n،\ 9n \pm 1،\ 9n \pm 2،\ 9n \pm 3$$

که هیچ‌کدام برابربا عددی به‌صورت $9n+4$ (ودرضمن $9n-4$) نیستند.

▽ درسال ۱۹۰۹، این فرضیهٔ وارینگ (۱۷۷۰) ثابت شد:

هرعدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع مکعب‌های تا حداکثر ۹ عدد طبیعی نوشت؛ برای هرعددطبیعی k، می‌توان هرعددطبیعی را به‌صورت مجموع توان‌های kاُم ω عدد طبیعی یا کمتر نوشت‌که، درآن، ω تنها به k بستگی دارد. فرضیهٔ اول را آ.وی فه‌ریخ وفرضیهٔ دوم را د.هیلبرت ثابت‌کرد (بعدها، یو.و.لی‌نیک، ریاضی‌دان شوروی، اثباتی مقدماتی از فرضیهٔ دوم داد). کمترین مقدار $\omega=\omega(k)$ برای $k=4$ مشخص شده است.

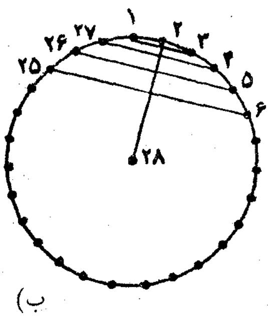
جالب است که، هرعدد طبیعی n را، می‌توان بـه سادگی به‌صورت مجموع پنج مکعب عدد درست درآورد. در واقـع، $n-n^3$، به‌ازای همهٔ مقدارهای طبیعی n، بر ۶ بخش‌پذیراست، بنابراین $n=n^3+6t$ (t، عددی است درست). ازآن جا

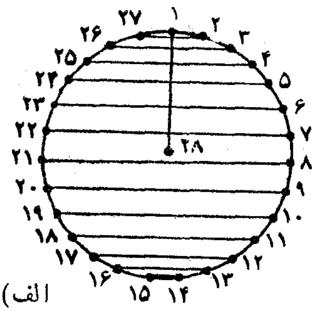
$$n=n^3+(t+1)^3+(t-1)^3+(-t)^3+(-t)^3$$

مسألهٔ ۱۲.۲. چون هردانش‌آموز نمی‌تواند با بیشتراز ۲۷ دانش‌آموز دیگرباشد، بنابراین، این جابه‌جایی را، بیش از۲۷ ماه نمی‌توان انجام داد.

نشان می‌دهیم که، معلم، چگونه می‌تواند، جای دانش‌آموزان را، در طول ۲۷ ماه مشخص کند.

دانش‌آموزان را با عددهای از ۱ تا ۲۸ شماره‌گذاری می‌کنیم. عددهای از ۱ تا ۲۷ را، به‌ردیف، روی محیط یك دایره و در رأس‌های ۲۷ ضلعی منتظم، وعدد ۲۸ را درمرکزدایره قرارمی‌دهیم. عدد ۱ را به‌عدد ۲۸ وصل می‌کنیم. بقیهٔ عددها را، دوبه‌دو، به‌وسیلهٔ پاره خط‌های راستی عمود براین پاره خط راست، به‌هم می‌پیوندیم (شکل ۸ـالف). دانش‌آموزان را، به‌این ترتیب، جا می‌دهیم: اگر دو عدد به وسیلهٔ یك پاره‌خط راست به هم وصل شده‌اند، دانش‌آموزان متناظر آن‌ها را روی یك نیمکت می‌نشانیم.





شکل ۸

درماه بعد، عدد ۲ را به ۲۸ وصل می‌کنیم و، مثل قبل، عددهای دیگر را، با پاره‌خط‌های راست عمود بر آن، به‌هم وصل می‌کنیم؛ معلم، عمل جادادن‌دانش‌آموزان‌را روی این‌طرح انجام خواهد داد (شکل ۸ـب). سپس به ترتیب، در ماه‌های بعد، پاره خط‌های راست ۳ـ۲۸، ۴ـ۲۸، ...،۲۷ـ۲۸ را رسم می‌کنیم و پاره خط‌های راست دیگر عمود برآن‌ها را درنظرمی‌گیریم.

▽ درشکل «۸ـالف» مجموع شماره‌های هردونقطه‌ای که به‌وسیلهٔ یك پاره خط راست به‌هم وصل شده‌اند، برابر ۲۹ است که، در تقسیم بر ۲۷،

به‌باقی ماندهٔ ۲ می‌رسد، و نقطهٔ ۱ به‌نقطهٔ ۲۸ درمرکز وصل شده است؛ عدد اخیردرموقعیت خاصی قرار دارد: بین عددهای از ۱ تا ۲۷، نمی‌توان جفت دیگری برای ۱ پیداکرد که مجموع آن‌ها، در تقسیم بر ۲۷، باقی مانده‌ای برابر ۲ داشته باشد، مگرخود عدد ۱.

درشکل «۸ـب»، موقعیت مشابهی وجوددارد: مجموع هردوعددی که در دوانتهای یك پاره خط راست قراردارند، درتقسیم بر ۲۷ به‌باقی ماندهٔ ۴ می‌رسد، ولی برای عدد ۲، نمی‌توان جفت مناسبی بین عددهای از ۱ تا ۲۷ پیداکرد، مگرخود عدد ۲؛ این عدد ۲ را به‌مرکز ۲۸ وصل می‌کنیم.

از این مشاهده می‌توان تغییر عددی زیر را برای مسألهٔ ۱۲.۲ شرح داد.

عددی مثل r را، بین عددهای از ۱ تا ۲۷، تثبیت می‌کنیم. سپس، عددهای از ۱ تا ۲۷ را طوری دوبه‌دو با هم جفت می‌کنیم که، برای هرجفت، مجموع دو عدد درتقسیم بر ۲۷ به‌باقی ماندهٔ r برسد. دراین میان، عددی مثل x بدون جفت می‌ماند که اگر آن را با خودش جمع کنیم، در تقسیم بر ۲۷، باقی مانده‌ای برابر r می‌دهد. اگر r عددی زوج باشد، آن وقت $x=\frac{r}{۲}$ و اگر r عددی فرد باشد، آن وقت $x=\frac{r+۲۷}{۲}$. این عدد x را با عدد ۲۸ جفت می‌کنیم.

اگر، به‌طور کلی، تعداددانش‌آموزان برابرعدد زوج n باشد، می‌توان با همین روش، آن‌ها را در $n-۱$ محل مختلف جا داد. دراین‌جا باید هردو عددی ازبین عددهای ۱ تا $n-۱$ را با هم جفت کرد که، مجموع آن‌ها، در تقسیم بر $n-۱$ به‌باقی ماندهٔ r برسد. درحالتی که r زوج باشد، عدد $\frac{r}{۲}$ و در حالتی که r فرد باشد، عدد $\frac{r+n-۱}{۲}$ بدون جفت می‌ماندکه بایدآن‌را با عدد n جفت کرد.

مسألهٔ ۱۳.۲. پاسخ: مثلاً ۴۸، ۴۹، ۵۰ ویا ۵۴۸، ۵۴۹، ۵۵۰.

∇ به‌طورکلی می‌توان ثابت کرد که، برای هر عدد طبیعی k، k عدد طبیعی متوالی وجود دارد، به‌نحوی که هرکدام از آن‌ها برمجذور عدد درستی بزرگتر از واحد بخش‌پذیر باشد.

برای این منظور، می‌توان از قضیه‌ای استفاده کرد که به‌قضیهٔ چینی مربوط به باقی‌مانده‌ها معروف است: برای عددهای طبیعی دلخواه a_1، a_2، ...، a_n که دوبه‌دو نسبت به هم اول‌اند، و عددهای درست و غیر منفی r_1، r_2، ...، r_n (با شرط $r_1<a_1$، $r_2<a_2$، ...، $r_n<a_n$)، عدد طبیعی m وجود دارد، به‌نحوی که درتقسیم بر a_1، a_2، ...، a_n، به‌ترتیب، به‌باقی‌مانده‌های r_1، r_2، ...، r_n برسد.

p_1^2، p_2^2، ...، p_n^2 را، مجذورهای n عدد اول مختلف می‌گیریم. در این صورت، بنابرقضیهٔ بالا، می‌توان عدد درست m را طوری پیداکرد که در تقسیم بـه عددهای p_1^2، p_2^2، ...، p_n^2، به‌ترتیب، به باقی‌مانده‌های p_1^2-1، p_2^2-2، ...، p_n^2-n برسد. بـه‌ایـن تـرتیب، n عـدد متوالی $m+1$، $m+2$، ...، $m+n$، به‌ترتیب بر p_1^2، p_2^2، ...، p_n^2 بخش‌پذیرمی‌شوند.

مثال (۵۴۸،۵۴۹،۵۵۰) را، کـه درپاسخ آوردیـم، به‌این صورت پیداکـرده‌ایم: $p_1=۲$، $p_2=۳$، $p_3=۵$ مـی گیریم و عدد m را طوری پیدا می‌کنیم که درتقسیم برعددهای ۴، ۹، ۲۵، به‌ترتیب، به‌باقی‌مانده‌های ۳، ۷، ۲۲ برسد. مثلاً می‌توان $m=۵۴۷$ را درنظر گرفت.

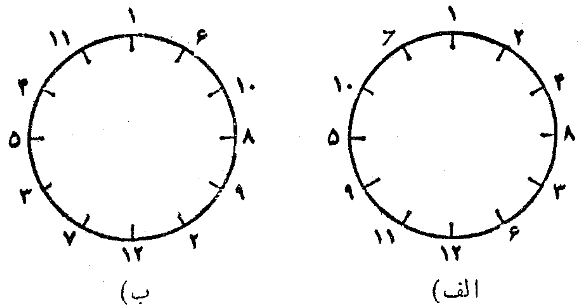
این عدد m را می‌تـوان به ایـن ترتیب به‌دست آورد: بـاید آن را به‌صورت زیرجست وجو کنیم:

$$m=a\times۹\times۲۵+۴\times b\times۲۵+۴\times۹\times c$$

بـرای این کـه عـدد $a\times۹\times۲۵$ درتقسیم بـر ۴ به‌باقی ماندهٔ ۳، عـدد $۴\times b\times۲۵$ درتقسیم بر۹ به‌باقی ماندهٔ ۷ و عدد $۴\times۹\times c$ درتقسیم بر ۲۵ به‌باقی ماندهٔ ۲۲ برسند، فرض می‌کنیم: $a=-۱$، $b=۷$ و $c=۲$، به‌دست می‌آید: $m=۵۴۷$.

مسألهٔ ۱۴۰۲. پاسخ: می‌توان.

روی شکل ۹، دو جواب مسأله داده شده است که می‌توانید به‌سادگی مورد تحقیق قراردهید.



شکل ۹

∇ عددهایی درشکل «۹ـالف» روی‌محیط دایره‌آمده‌اند، اگردرجهت حرکت عقربه‌های ساعت به حساب‌آوریم، عبارتند از باقی‌مانده‌های تقسیم عددهای ۱، ۲، $۲^۲$، $۲^۳$، ...، $۲^{۱۱}$ برعدد ۱۳؛ و اگردرجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت به‌حساب‌آوریم، عبارتند ازباقی‌مانده‌های تقسیم عددهای ۱، ۷، $۷^۲$، $۷^۳$، ...، $۷^{۱۱}$ بر۱۳. طبیعی است که، برای هرسه عدد مجاور a، b و c (وهمچنین، برای باقی‌مانده‌های آن‌ها درتقسیم بر۱۳)، عدد $b^۲ - ac$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است؛ و اگر سه عدد a، b و c به تصاعد هندسی باشند، آن‌وقت $b^۲ = ac$.

به‌همین ترتیب، درشکل «۹ـب»، باقی‌مانده‌های تقسیم عددهای ۱، ۶، $۶^۲$، ...، $۶^{۱۱}$ بر ۱۳ (درجهت حرکت عقربه‌های ساعت) و باقی ماندهٔ تقسیم عددهای ۱، ۱۱، $۱۱^۲$، ...، $۱۱^{۱۱}$ بر۱۳ (درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) نوشته شده است.

درشکل ۹، عددهای ۲، ۶، ۱۱، ۷، در کنارعدد ۱ آمده‌اند؛ این‌ها، باقی مانده‌های عددهای ۲، $۲^۵$، $۲^۷$، $۲^{۱۱}$ بر۱۳ هستند.

درحالت کلی، برای هر عدد اول p، عددی مثل r (به‌نام ریشهٔ اولیه)

وجود دارد، به‌نحوی که در تقسیم عددهای 1، r، r^2، ...، r^{p-1} بر عدد p، به‌باقی‌مانده‌های 1، 2، ...، $p-1$ برسیم. تعداد این‌گونه عددهای r، برابر است با $\varphi(p-1)$، یعنی تعداد عددهایی از 1 تا $p-2$، که نسبت به‌عدد $p-1$، اول‌اند (حل مسألهٔ ۸.۲ را ببینید).

درمسألهٔ ۱۴.۲، داریم: $p=13$ و $\varphi(p-1)=\varphi(12)=4$، زیرا چهارعدد ۱، ۵، ۷ و ۱۱ وجود دارند که از ۱۲ کوچکتر و نسبت به‌آن اول‌اند. ریشه‌های اولیه برای تقسیم بر۱۳ (یعنی مقدارهایی که به‌جای r می‌توان درنظر گرفت)، عبارتند از 2، 2^5، 2^7 و 2^{11}.

مسألهٔ ۱۵.۲. پاسخ: درست نیست.

مثلاً، به‌ازای $n=6$ به‌دست می‌آید: $6^3+5\times 6-1$ که بر 5×7^2 بخش‌پذیر است.

▽ اصولاً هیچ چند جمله‌ای $F(n)$ با ضریب‌های درست وجود ندارد (به‌جز مقدارثابت) که به‌ازای همهٔ مقدارهای طبیعی n، عددی اول باشد.

در واقع، اگر a، مقدار ثابت چند جمله‌ای $F(n)$ غیراز 0 و ± 1 باشد، آن وقت، مقدارهای $F(ka)$ بر a بخش‌پذیر خواهند بود و در بین آن‌ها، عددهای مرکب وجود خواهد داشت. درحالتی‌هم که $a=\pm 1$ باشد، می‌توان چند جمله‌ای $F(n)$ را به‌چند جمله‌ای $F(n+h)=G(n)$ طوری تبدیل کرد که جملهٔ ثابت آن برابر ± 1 نباشد.

درمسألهٔ ۱۵.۲، می‌توان مثلاً به‌این ترتیب عمل کرد. $n=m+1$ می‌گیریم؛ درچند جمله‌ای

$$F(m+1)=(m+1)^3+5(m+1)-1$$

جملهٔ ثابت برابر ۵ است و، بنابراین، $F(6)$ بر ۵ بخش‌پذیر می‌شود.

چندی پیش (درسال ۱۹۷۰)، ریاضی‌دان شوروی، یو. و. ماتیاسه‌ویچ، ثابت کرد که یك چند جمله‌ای با ۲۱ متغیر وجود دارد که دارای ویژگی زیر است: مجموعهٔ مقدارهای مثبت آن، به‌ازای مقدارهای درست متغیرها، بر مجموعهٔ عددهای اول منطبق است.

مسألهٔ ۱۶.۲. این عدد را تجزیه می‌کنیم:

$$n^۵-۵n^۳+۴n=n(n^۴-۵n^۲+۴)=n(n^۲-۱)(n^۲-۴)=$$
$$=(n-۲)(n-۱)n(n+۱)(n+۲)$$

به‌این‌ترتیب، به‌حاصل‌ضرب پنج عدد درست متوالی می‌رسیم. یکی از این عددها بر ۵ بخش‌پذیر است؛ یکی از سه‌عدد متوالی بر ۳ و از بین چهار عدد متوالی، یکی بر ۴ و یکی بر ۲ بخش‌پذیر است، یعنی عدد مفروض بر ۱۲۰ بخش‌پذیر می‌شود.

∇ در واقع، عدد

$$\frac{(n+۲)(n+۱)n(n-۱)(n-۲)}{۱\times۲\times۳\times۴\times۵}$$

چیزی جز $C^۵_{n+۲}$ نیست (تعداد ترکیب‌های ۵ تایی از $n+۲$ شیء)؛ و این عدد، بی‌تردید، عددی درست است.

به‌طور کلی، چندجمله‌ای $F(x)$، تنها وقتی به‌ازای همهٔ مقدارهای x، برابر با عددی درست است که بتوان آن را به‌صورت مجموع

$$F(x)=\sum a_kC_x^k$$

نوشت که، درآن، a_k ضریب‌هایی درست و

$$C_x^k=\frac{x(x-۱)\ldots(x-k+۱)}{k!}$$

مسألهٔ ۱۷.۲. الف) پاسخ: بله.

این چند جمله‌ای را می‌توان، به‌صورت زیرنوشت:

$$p(x)=ax(x-۱)+bx+c$$

اگر دراین چند جمله‌ای $x=۰$، $x=۱$ و $x=۲$ قراردهیم، برای پیدا کردن ضریب‌های a و b و c، به‌دستگاه معادله‌های خطی «مثلثی» زیرمی‌رسیم:

$$\begin{cases} c=۱۹ \\ b+c=۸۵ \\ ۲a+۲b+c=۱۹۸۵ \end{cases}$$

که از آن به دست می‌آید: $c=۱۹$، $b=۶۶$، $a=۹۱۷$ و پاسخ چنین می‌شود:

$$p(x)=۹۱۷x^۲-۸۵۱x+۱۹$$

∇ درحالت کلی هم، وقتی که مقدارهای یك چند جمله‌ای را در $n+۱$ نقطهٔ $c_۱$، $c_۲$، ...، $c_{n+۱}$ داشته‌باشیم، می‌توانیم به‌همین‌ترتیب، چندجمله‌ای $p(x)$ را، با درجه‌ای که از n تجاوز نمی‌کند، به‌دست‌آوریم. $p(x)$ را به این صورت می‌نویسیم:

$$p(x)=b_\circ+b_۱(x-c_۱)+b_۲(x-c_۱)(x-c_۲)+\dots$$
$$\dots+b_n(x-c_۱)(x-c_۲)\dots(x-c_n)$$

ومقدارهای $c_۱$، $c_۲$، ...، $c_{n+۱}$ را، به‌جای x، درآن قرار می‌دهیم، دستگاه «مثلثی» خطی ساده‌ای برای تعیین $n+۱$ ضریب مجهول $b_\circ$، $b_۱$، ...، b_n به‌دست می‌آید.

این روش پیدا کردن چند جمله‌ای را، وقتی مقدارهایی از آن معلوم باشد، روش درون‌یابی نیوتون گویند.

ب) پاسخ: نه، وجود ندارد.

برای اثبات، ازاین قضیه استفاده می‌کنیم: اگرچند جمله‌ای

$$p(x)=a_\circ x^n+a_۱x^{n-۱}+a_۲x^{n-۲}+\dots+a_{n-۱}x+a_n$$

با ضریب‌های درست، مفروض باشد، برای هردوعدد درست c و d، عدد درست $p(c)-p(d)$ برعدد $c-d$ بخش‌پذیر است.

با تکیه‌براین‌قضیه، عدد $p(۱۹)-p(۱)=۶۶$ باید برعدد $۱۹-۱$، یعنی ۱۸ بخش‌پذیرباشد؛ عدد ۶۶ بر ۱۸ بخش‌پذیرنیست و، ازاین جا، پاسخ مسأله به‌دست می‌آید.

قضیه‌ای راکه دراین جا آوردیم، ثابت می‌کنیم. داریم:

$$p(c)-p(d)=(a_\circ c^n+a_۱c^{n-۱}+\dots+a_{n-۱}c+a_n)-$$
$$-(a_\circ d^n+a_۱d^{n-۱}+\dots+a_{n-۱}d+a_n)=$$

$$=a_0(c^n-d^n)+a_1(c^{n-1}-d^{n-1})+\ldots+a_{n-1}(c-d)$$

از طرف دیگر، برای هر عدد طبیعی k داریم:

$$c^k-d^k=(c-d)(c^{k-1}+c^{k-2}d+\ldots+cd^{k-2}+d^{k-1})$$

(که می‌توان آن را از رابطهٔ مجموع در تصاعد هندسی با جملهٔ اول c^{k-1} و قدر نسبت $\frac{d}{c}$ به‌دست آورد.) به‌این ترتیب، همهٔ جمله‌هایی که برای $p(c)-p(d)$ به‌دست آورده‌ایم، بر $c-d$ بخش‌پذیرند، یعنی مجموع آن‌ها هم بر $c-d$ بخش‌پذیر است.

∇ به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که، برای هر چندجمله‌ای $p(x)$ و هر عدد d، چند جمله‌ای $p(x)-p(d)$ بر دو جمله‌ای $x-d$ بخش‌پذیر است، یعنی $p(x)-p(d)=(x-d)q(x)$ که، در آن، $q(x)$، یك چند جمله‌ای است. اگر این اتحاد را به‌صورت

$$p(x)=(x-d)q(x)+p(d)$$

بنویسیم، به‌قضیهٔ بِزو می‌رسیم: باقی‌ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر دو جمله‌ای $x-d$، برابر است با $p(d)$.

مسألهٔ ۱۸.۰۲. الف) پاسخ:

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$$

در واقع داریم:

$$x^8+x^4+1=x^8+2x^4+1-x^4=(x^4+1)^2-(x^2)^2=$$

$$=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)=[(x^2+1)^2-x^2](x^4-x^2+1)=$$

$$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$$

ب) پاسخ:

$$(x^3-x^2+1)(x^2+x+1)$$

در واقع داریم:

$$x^5+x+1=(x^5+x^4+x^3)-(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1)=$$
$$=(x^3-x^2+1)(x^2+x+1)$$

▽ چند جمله‌ای‌هایی از درجه‌های مختلف، وجود دارند که نمی‌توان آن‌ها را به صورت ضرب چند جمله‌ای‌هایی با ضریب‌های درست و درجهٔ پایین‌تر تجزیه کرد (مثل x^n-2). این گونه چندجمله‌ای‌ها را غیرقابل‌تحویل گویند.

قاعده‌ای وجود دارد که، به کمك آن، می‌توان هرچند جمله‌ای را به‌صورت ضرب چند جمله‌ای‌های غیرقابل تحویل تبدیل ویا عدم امکان تجزیهٔ آن را ثابت کرد.

مسألهٔ ۱۹.۲. پاسخ: به‌ازای $a=-2$.

فرض می‌کنیم، چند جمله‌ای‌های

$$f(x)=x^4+ax^2+1,\quad g(x)=x^3+ax+1$$

دارای ریشهٔ مشترك x_0 باشند. اگرچند جمله‌ای دوم را در x ضرب و از چند جمله‌ای اول کم کنیم، به‌چند جمله‌ای می‌رسیم که همان ریشهٔ x_0 را دارد؛ واین، یك چند جمله‌ای ساده است:

$$f(x)-xg(x)=1-x$$

تنها ریشهٔ این چند جمله‌ای، عبارت است از $x_0=1$؛ وچند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$، به‌ازای $a=-2$ دارای این ریشه‌اند: هم $f(1)$ و هم $g(1)$، به‌صورت $a+2$ درمی‌آیند.

▽ برای این که چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ دارای ریشهٔ مشترك x_0 باشند، باید هردوی آن‌ها بردو جمله‌ای $x-x_0$ بخش‌پذیر باشند (قضیهٔ بِه‌زو، مسألهٔ ۱۷.۲ را ببینید). مقسوم علیه مشترك دوچند جمله‌ای را می‌توان به کمك آلگوریتم اقلیدس به‌دست‌آورد.* درمسألهٔ ۱۹.۲، با برداشتن

---

* کتاب «روشهای جبر، جلد اول، تألیف پرویزشهریاری» را ببینید. ــم.

یك گام ازاین‌آلگوریتم، به‌باقی‌ماندهٔ $x-۱$ می‌رسیم. سپس، اگر $g(x)$ را بر $x-۱$ تقسیم‌کنیم، باقی ماندهٔ $a+۲$ به‌دست می‌آید:

$$g(x)=(x-۱)(x^۲+x+a+۱)+(a+۲)$$

برای $a=-۲$، این باقی مانده برابر صفرمی‌شود و، برای $a\neq-۲$، دو چند جمله‌ای مقسوم‌علیه مشترکی نخواهند داشت.

مسألهٔ ۲۰۵۰۲. الف) $k=a^۲+۵b^۲$ و $l=c^۲+۵d^۲$ می گیریم (دو عدد دلخواه ازمجموعهٔ M). دراین صورت

$$kl=(a^۲+۵b^۲)(c^۲+۵d^۲)=(ac-۵bd)^۲+۵(ad+bc)^۲ \quad (*)$$

بنابراین $kl=x^۲+۵y^۲$ که، درآن، $x=ac-۵bd$ و $y=ad+bc$؛ یعنی عدد kl به‌مجموعهٔ M تعلق دارد.

ب) پاسخ: وجود دارد. مثلاً $۸۴=۴\times۲۱=۶\times۱۴$.

ثابت می‌کنیم، هرپنج عددی‌که دراین جا نوشته‌ایم، به‌مجموعهٔ M تعلق دارند. در واقع

$$۴=۲^۲+۵\times۰^۲,\ ۶=۱^۲+۵\times۱^۲,\ ۱۴=۳^۲+۵\times۱^۲,$$
$$۲۱=۴^۲+۵\times۱^۲,\ ۸۴=۲^۲+۵\times۴^۲$$

برای این‌که روشن‌کنیم، عـددهای ۴، ۶، ۱۴، ۲۱، عددهای پایه هستند، همهٔ عددهای مجموعهٔ M را، که ازواحد بزرگترند وازا۲ تجاوزنمی‌کنند، می‌نویسیم: ۴، ۵، ۶، ۹، ۱۴، ۱۶، ۲۰، ۲۱. همهٔ این‌عددها، به‌جز ۱۶ و ۲۰، عـددهای پایه‌اند، زیـرا هیچ‌کـدام ازآن‌ها، برعددهای قبل ازخود بخش‌پذیر نیستند.

ج) ازبرهان خلف استفاده وفرض می‌کنیم، تعداد عددهای پایه‌محدود باشد: $b_۱$، $b_۲$،...،b_n. دراین صورت، روشن است‌که عدد

$$۱+۵(b_۱b_۲\ldots b_n)^۲$$

به M تعلق دارد و، در ضمن، بر هیچ کدام از عددهـای $b_۱$، $b_۲$، ... ، b_n

بخش‌پذیر نیست؛ به‌این‌ترتیب، عددپایهٔ دیگری، غیرازعددهای مفروض ما، به‌دست می‌آیدکه فرض ما را نقض می‌کند.

▽ به‌شباهت بین مجموعهٔ M و مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی توجه کنیم.

همان‌طور که هرعدد طبیعی را می‌توان به‌صورت ضرب عددهای اول نوشت، هر عدد مجموعهٔ M هم قابـل تبدیل بـه‌ضرب عددهای پایه است. ولی، اگرهرعدد طبیعی، بـه‌صورتی منحصر به‌فرد قابل تجزیه به عددهای اول است (قضیهٔ اصلی حساب)، در مورد عددهای مجموعهٔ M، بنابر حل مسألهٔ ۲۰.۲، ب)، این حکم درست نیست.

برای علاقه‌مندان. اتحاد(*)، ارتباط نزدیکی باقاعدهٔ ضرب درعددهای به صورت $x+y\sqrt{-5}$ دارد:

$$(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})=(ac-5bd)+(ad+bc)\sqrt{-5}$$

مسألهٔ مربوط به‌تجزیهٔ عـددهای مجموعهٔ به ضرب عامـل‌ها، هم‌ارز است بامسألهٔ مربـوط بـه‌تجزیه بـه‌عامل‌ها، درحلقهٔ عـددهای بـه‌صورت $x+y\sqrt{-5}$ کـه در آن، x و y، عددهایی درست‌انـد. مسألهٔ مربوط به تجزیهٔ به‌عامل‌ها، درحلقه‌هایی ازاین گونه، شهرت زیادی درتاریخ ریاضیات دارد. ازهمین گونه مسأله‌ها بود که شاخهٔ تازه‌ای از ریاضیات، به‌نام نظریهٔ جبری عددها به‌وجودآمد.

مسألهٔ ۲۱.۲. پاسخ: به‌عنوان نمونه

$$(7^2, 13^2, 17^2);\ (17^2, 25^2, 31^2);\ (31^2, 41^2, 49^2)$$

سه عدد مجذور کامل p^2، q^2، r^2، تنها وقتی به‌تصاعد حسابی هستند که داشته باشیم: $p^2+r^2=2q^2$، یا

$$(r-q)(r+q)=(q-p)(q+p)$$

مثلاً، برای $p=31$، $q=41$ و $r=49$ داریم:

$$(49-41)(49+41)=(41-31)(41+31)=720$$

∇ دراین جا، دستورکلی عددهای سه‌گانهٔ ازاین گونه (که دوبه‌دو نسبت به‌هم اول باشند)، می‌آوریم:

$$p=n^2+2mn-m^2,\quad q=m^2+n^2,\quad r=m^2+2mn-n^2$$

که درآن‌ها، m و n، عددهای دلخواهی، دوبه‌دو نسبت به‌هم اول‌اند. اگر به‌ازای مقداری از m و n، عددهای p و q و r دارای مقسوم‌علیه مشترکی باشند، می‌توانیم آن‌ها را، به‌این عدد ساده‌کنیم. (این حالت وقتی پیش می‌آیدکه عددهای m و n، فرد باشند؛ دراین صورت، عددهای متناظر p و q و r، عددهایی زوج، و درنتیجه، بر ۲ بخش‌پذیر می‌شوند. به سادگی می‌توان ثابت کرد که p و q و r، مقسوم علیه مشترك دیگری نمی‌توانند داشته باشند.)

برای این که قانع شوید، چنین عددهایی برای p و q و r مناسب‌اند، می‌توانیدآن‌ها را دررابطهٔ $(p-q)(p+q)=(q-r)(q+r)$ قراردهید.

باروش‌های مختلفی می‌توان این دستورها را پیدا کرد که ما، دراین‌جا، یکی ازآن‌ها را می‌آوریم.

$p^2+r^2=2q^2$ می‌گیریم. همهٔ جمله‌های این معادله را به q^2 تقسیم می‌کنیم، به دست می‌آید: $2=\left(\frac{p}{q}\right)^2+\left(\frac{r}{q}\right)^2$. فرض می‌کنیم $x=\frac{p}{q}$ و $y=\frac{r}{q}$، به‌معادلهٔ $x^2+y^2=2$ می‌رسیم. به‌این‌ترتیب، مسألهٔ پیداکردن p و q و r، منجربه‌حل معادلهٔ $x^2+y^2=2$، درمجموعهٔ عددهای گویای x و y می‌شود.

اندیشهٔ حل این معادله را، با زبان هندسی روشن می‌کنیم. حل این معادله، به‌معنای پیداکردن همهٔ نقطه‌های با مختصات گویا، روی محیط دایرهٔ $x^2+y^2=2$ است. یکی ازاین نقطه‌ها، ومثلاً نقطهٔ $(-1,-1)$ را در نظرمی‌گیریم. اگر از این نقطه و نقطهٔ دیگر (x,y) ــ که مختصات گویا دارد ــ خط راستی بگذرانیم، ضریب زاویهٔ این خط راست، یعنی $t=\frac{y+1}{x+1}$،

عددی گویا می‌شود.

عکس این حکم هم درست است: هرخط راست باضریب زاویهٔ گویای $t\neq -1$، که ازنقطهٔ $(-1, -1)$ گذشته‌باشد، محیط‌دایرهٔ $x^2+y^2=2$ را درنقطهٔ دیگر (x, y) با مختصات گویا قطع می‌کند. برای این‌که به‌این موضوع قانع شویم، مقدار y را ازمعادلهٔ خط راست $y=t(1+x)-1$، درمعادلهٔ دایره قرارمی‌دهیم:

$$x^2+[t(1+x)-1]^2=2;$$

$$(1+t^2)x^2-2t(1-t)x+(t^2-2t-1)=0$$

یکی از ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ دوم را، از قبل می‌دانیم: $x=-1$. به‌کمك قضیهٔ ویت (مربوط به‌رابطهٔ بین ریشه‌ها و ضریب‌های معادله)، ریشهٔ دوم به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{-t^2+2t+1}{t^2+1}$$

با در دست داشتن x، مقدار y هم به‌دست می‌آید:

$$y=\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}$$

اکنون اگر $t=\frac{m}{n}$ بگیریم، از $x=\frac{p}{q}$ و $y=\frac{r}{q}$، مقدارهای p و q و r، به‌این صورت، به‌دست می‌آیند:

$$p=-m^2+2mn+n^2,\ \ q=m^2+n^2,\ \ r=m^2+2mn-n^2$$

ازاین روش استدلال، برای جست و جوی همهٔ نقطه‌های گویا روی‌هر منحنی درجهٔ دوم، و یا هم ارز آن، جست و جوی همهٔ جواب‌های درست درمعادلهٔ ازنوع

$$ax^2+bxy+cy^2=dz^2$$

می‌توان استفاده کرد، به شرطی که با ضریب‌های درست درمعادله‌ها سروکار داشته باشیم و دست کم، مختصات یکی از نقطه‌های با مختصات گویا معلوم باشد. برای روشن کردن این موضوع هم که، آیا چنین نقطه‌ای وجوددارد، روشی کلی پیدا شده است.

مسألهٔ ۲۲۰۲. پاسخ: الف) هفت جواب درمجموعهٔ عددهای درست:

$$(3,-12);\ (3,12);\ (2,-6);\ (2,6);\ (-1,0);\ (1,0);\ (0,0)$$

ب) و چهارجواب گویای دیگر: $\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}\right)$ ؛ $\left(-\frac{1}{3},\pm\frac{4}{3}\right)$.

∇ این مطلب را که، چگونه می‌توانیم معادله‌ای را، در مجموعهٔ عددهای گویا، با دراختیارداشتن جواب‌هایی ازآن، حل کنیم، می‌توان با زبان هندسی توضیح داد. معادلهٔ مفروض، متناظراست بایك منحنی درصفحهٔ مختصات Oxy.

فرض می‌کنیم، دو نقطه ازاین منحنی را، که مختصاتی گویا دارند، مثل (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دراختیارداشته باشیم. چون معادلهٔ منحنی از درجهٔ سوم است، بنابراین، خط راستی که از این دو نقطه بگذرد، منحنی را درنقطهٔ سومی قطع می کند. مختصات (x_3, y_3) این نقطه، به صورت‌تابع‌های گویایی نسبت به x_1، y_1، x_2، y_2 با ضریب‌هایی درست بیان می‌شوند و، در نتیجه، این مختصات، عددهایی گویا هستند.

به این ترتیب، با در دست داشتن جواب‌های گویای (x_1, y_1) و (x_2, y_2) از معادله، می‌توانیم به جواب گویای جدید (x_3, y_3) دسترسی پیدا کنیم.

اکنون، محاسبه‌های مربوط به‌آن را انجام می‌دهیم.

معادلهٔ خط راستی که از دو نقطهٔ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می گذرد، به صورت

$$y=t(x-x_1)+y_1, \quad t=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

درمی‌آید. اگرمقدار y را درمعادلهٔ $y^۲=۶(x^۳-x)$ قراردهیم، به‌معادلهٔ درجهٔ سومی نسبت به x می‌رسیم که، دو ریشهٔ آن $x_۱$ و $x_۲$، از قبل برای ما معلوم است و ریشهٔ سوم را می‌توان، با توجه به قضیهٔ ویت، پیدا کرد:

$$x_۳=\frac{t^۲}{۶}-x_۱-x_۲ \qquad (۱)$$

به‌همین ترتیب، $y_۳$ هم به‌دست می‌آید:

$$y_۳=\frac{t^۳}{۶}+۲y_۱-y_۲-۳tx_۱ \qquad (۱')$$

می‌توانستیم، مماس‌درنقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ را برمنحنی درنظربگیریم و نقطهٔ برخورد دیگرآن را با منحنی پیداکنیم، به‌دست می‌آید:

$$x_۴=\frac{t^۲}{۶}-۲x_۱ \ , \ y_۴=\frac{t^۳}{۶} \qquad (۲)$$

[در این جا، t عبارت است از ضریب زاویهٔ خط راست مماس بر منحنی، در نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$].

به‌این‌ترتیب، دستورهایی به‌دست می‌آیدکه، به‌کمک‌آن‌ها، می‌توان‌از روی جواب‌های گویا ومعلوم معادلهٔ $y^۲=۶(x^۳-x)$، جواب‌های گویای جدیدی برای‌آن پیداکرد.

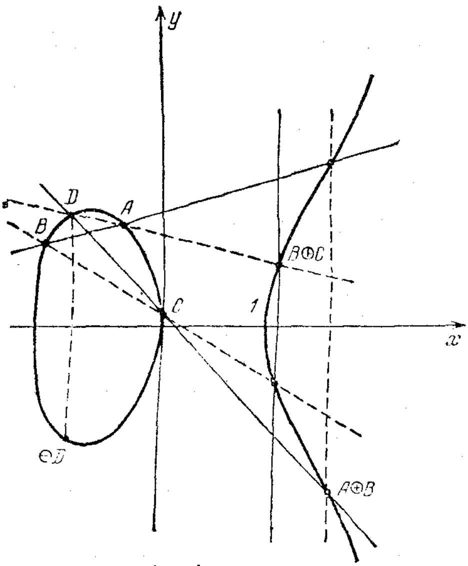
برای علاقه‌مندان. به‌طورطبیعی با این پرسش‌ها روبه‌رومی‌شویم. آیا روشی وجود داردکه، به‌کمک‌آن، بتوان (بادردست‌داشتن نقطه‌های گویایی ازخط‌راست)، هربارنقطه‌های گویای تازه‌ای به‌دست‌آورد؟ آیا مجموعهٔ این نقطه‌های گویا متناهی‌است یا نامتناهی؟ به چه ترتیبی، همهٔ‌آن‌ها را می‌توان شرح داد؟ دربین‌آن‌ها، چند نقطهٔ با مختصات درست وجود دارد؟

برای این که به‌این پرسش‌ها پاسخ بدهیم، بهتراست ابتدا، به عمل جمع نقطه‌ها، روی منحنی درجهٔ سوم اشاره‌کنیم که، درضمن دارای ویژگی شرکت‌پذیری هستند. این عمل را روی منحنی با معادلهٔ زیرشرح می‌دهیم:

$$y^2=x^3+ax+b \qquad (۳)$$

(هرمنحنی درجهٔ سوم دیگر $P(x,y)=0$ را می‌توان با تبدیل متغیرها، به این صورت درآورد؛ درضمن، اگرضریب‌های $P(x,y)$ عددهایی درست باشند، مسألهٔ جست و جوی نقطه‌های با مختصات گویا روی منحنی $P(x,y)=0$ را می‌توان به‌مسألهٔ مشابهی برای منحنی (۳) با ضریب‌های درست a و b منجر کرد. درمسألهٔ ما، منحنی $y^2=6(x^3-x)$ را می‌توان با تغییر متغیرهای $v=6x$، $u=6y$ به‌صورت $u^2=v^3-36v$ درآورد.)

دو نقطهٔ A و B ازمنحنی (۳) را در نظر می‌گیریم و نقطهٔ برخورد سوم خط راست AB با این منحنی را پیدا می‌کنیم. قرینهٔ این نقطهٔ برخورد سوم را نسبت به‌محور Ox با نماد $A\oplus B$ نشان می‌دهیم (شکل ۱۰). در این



$\ominus D=(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

شکل ۱۰

صورت، برای هرسه نقطهٔ A، B و C ازمنحنی، داریم:

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

این ویژگی شرکت‌پذیری، تعبیرهندسی جالبی دارد. اگر دو دستهٔ سه‌تایی خط راست، به‌نحوی روی صفحه رسم کنیم به‌طوری که هردو خط راستی که ازدو دستهٔ مختلف هستند، یکدیگر را قطع کنند، این دو دسته خط یکدیگر را در ۹ نقطه قطع می‌کنند، آن وقت منحنی درجه سومی که شامل ۸ نقطه ازاین ۹نقطه باشد، حتماً شامل نقطهٔ نهم هم خواهد بود. اگرنقطهٔ بی‌نهایت دور Z را به‌منحنی اضافه کنیم،آن وقت مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های آن با عمل $\oplus$، تشکیل‌یك گروه جابه‌جایی می‌دهند (ویژگی $A \oplus B = B \oplus A$ واضح است). نقطهٔ Z دراین گروه، نقش صفررا به عهده دارد، نقطهٔ $\ominus A$، نقطهٔ متقابل A، قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به Ox به‌حساب می‌آید. شرط تعلق سه نقطهٔ A، B و C به‌یك‌خط راست‌را می‌توان به‌صورت $A \oplus B = \ominus C$ یا $A \oplus B \oplus C = Z$ نوشت.

نقطه‌های با مختصات گویا روی منحنی (۳) هم، به‌شرط درست‌بودن a و b، نسبت به عمل $\oplus$، تشکیل یك گروه می‌دهند. در منحنی $y^{۲} = ۶(x^{۳} - x)$، جمع نقطه‌ها بارابطه‌های (۱)، (′۱) و(۲)داده‌می‌شوند، یعنی

$$(x_{۱}, y_{۱}) \oplus (x_{۲}, y_{۲}) = (x_{۳}, -y_{۳});$$

$$(x_{۱}, y_{۱}) \oplus (x_{۱}, y_{۱}) = ۲(x_{۱}, y_{۱}) = (x_{۴}, y_{۴})$$

همهٔ نقطه‌هایی راکه درپاسخ مسأله داده‌ایم، می‌توان ازسه نقطهٔ $E(۱, ۰)$، $F(-۱, ۰)$ و $G(۲, ۶)$ به‌دست‌آورد. درضمن داریم:

$$E \oplus F = (۰, ۰);\quad E \oplus G = (۳, ۱۲);\quad F \oplus G = \left(-\frac{۱}{۳}, \frac{۴}{۳}\right);$$

$$E \oplus F \oplus G = \left(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۲}{۳}\right);\quad G \oplus G = ۲G = \left(\frac{۲۵}{۲۴}, -\frac{۳۵}{۴۸}\right);$$

$$۲G\oplus F=\left(-\frac{۱}{۴۹},\ \frac{۱۲۰}{۴۹}\right);\ ۲G\oplus E=(۴۹،\ ۸۴۰)$$

وغیره (توجه کنیم که $۲E=۲F=۲(E\oplus F)=Z$).

پیدا کردن گروه کامل نقطه‌های گویا، برای منحنی مشخص(۳)، مسألهٔ بسیاردشواری است. ثابت شده است که این، گروهی با تعدادی متناهی‌مولد است (قضیهٔ موردل)، ولی به این مولدها، نمی‌توان به‌سادگی دست یافت.

نقطه‌های با مختصات درست، همان‌طور که درمثال ما دیده می‌شود، به‌ندرت در بین نقطه‌های با مختصات گویا ظاهر می‌شوند. ولی بنابر قضیهٔ توئه، برای منحنی‌های غیرخاص درجهٔ ۳ (ویا بیشتر)، تعداد آن‌ها محدود است.

همین چندی پیش، درسال ۱۹۸۳، فال‌تینگ ریاضی‌دان جوان، توانست فرضیه موردل را ثابت کند: روی منحنی غیر خاص $P(x،y)=۰$ از ردهٔ بزرگتر از ۱، تنها تعداد محدودی نقطه‌های با مختصات گویا می‌تواند وجود داشته باشد (در این جا، $P(x،y)$، یک چند جمله‌ای با ضریب‌های درست است).

ردهٔ منحنی $P(x،y)$ را، به‌طورنسبی می‌توان به سادگی و در رابطه با درجهٔ n چند جمله‌ای $P(x،y)$ محاسبه کرد. منحنی ردهٔ ۰، به دایره و سایرمنحنی‌های درجهٔ دوم مربوط می‌شود، و ردهٔ ۱، به‌منحنی‌های غیرخاص درجهٔ سوم. منحنی‌های غیرخاص $P(x،y)=۰$ با درجهٔ $n\geqslant ۴$، معمولاً رده‌ای کمتراز ۲ ندارند و، بنابراین، تنها می‌توانند تعدادی متناهی از نقطه‌های بامختصات گویا داشته باشند. همین مطلب، درحالت خاص، درمورد منحنی فرما، یعنی $x^n+y^n=۱$، به‌ازای $n\geqslant ۴$ هم صادق است.

مسأله‌هایی برای کارمستقل دانش‌آموزان

۲۳.۴. می‌خواهیم کامیونی باظرفیت ۳تن را، به‌طور کامل باصندوق‌های ۱۳۰ کیلوگرمی و ۱۶۰ کیلوگرمی پر کنیم. آیا ممکن است؟

۲۴۰۲. روی محیط دایره‌ای به‌شعاع ۴۰ سانتی‌متر، چرخی به شعاع ۱۸ سانتی‌متر می‌غلطد. روی چرخ، میخی کوبیده شده است که وقتی روی محیط دایره قرار گیرد، علامتی روی آن می گذارد.

الف) روی هم چند علامت روی محیط دایره زده می‌شود؟

ب) چرخ چندبار بایدمحیط دایره را دور بزنندتا علامت میخ روی‌یکی ازعلامت‌های قبلی بیفتد؟

۲۵۰۲. روی‌یك جادهٔ دایره‌ای، مسابقهٔ‌امدادی موتورسیکلت‌سواران انجام می‌شود. مسابقه‌درهمان نقطه‌ای پایان می‌یابدکه‌آغازشده است. طول جادهٔ دایره‌ای ۳۳۰ کیلومترو طول هرمرحله ۷۵ کیلومتراست (حرکت در جاده، یك طرفه است). در جاده، چند نقطه برای تعویض وجود دارد و فاصلهٔ بین‌آن‌ها چقدراست؟

۲۶۰۲. دربارهٔ شکلی که روی صفحه رسم شده است، می‌دانیم ، وقتی دور نقطهٔ O به‌اندازهٔ ۴۸ درجه دوران کند، برخودش منطبق می‌شود. آیا می‌توان گفت، اگر این شکل دور نقطهٔ O به‌اندازهٔ‌الف) ۹۰درجه؛ب) ۷۲ درجه دوران‌کند، برخودش منطبق می‌شود؟

۲۷۰۲. یك شکل مسطحه، ضمن دوران دور نقطهٔ O به اندازهٔ زاویهٔ ۱۹ درجه، برخودش منطبق می‌شود. ثابت کنید، این شکل، در دوران به اندازهٔ ۸۶ درجه روی خودش می‌افتد.

۲۸۰۲. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك این عددها را پیدا کنید:

الف) $2^{91}-1$ و $2^{63}-1$؛ ب) $2^{19}+1$ و $2^{86}+1$

۲۹۰۲. متوازی‌الاضلاعی با زاویهٔ حادهٔ ۶۰ درجه و طول ضلع‌های a و b (a و b، عددهایی درست‌اند و $a>b$) مفروض است. خط راستی که از رأس این متوازی‌الاضلاع گذشته است، مثلث متساوی‌الاضلاعی را ازآن جدامی کند.درمورد ذوزنقه‌ای هم که‌باقی‌می‌ماند، همین‌عمل‌را انجام می‌دهیم و، سپس، درمورد متوازی‌الاضلاعی که ازذوزنقه باقی ماند وغیره، تا زمانی که یك لوزی به‌دست‌آید.

الف) به‌شرط $a=۱۹۸۶$ و $b=۱۸۰۰$، طول ضلع این لوزی چقدر است؟

ب) a و b را طوری پیدا کنید که، ضمن ایـن برش‌ها، مثلث‌هایی با هشت اندازهٔ مختلف به‌دست آید.

۳۰.۲. مستطیلی را به‌خانه‌های ۱ × ۱ سانتی‌متری تقسیم کرده‌ایم. در داخل هرخانه، عددی نـوشته‌ایم. مـی‌دانیم، مجموع عددها درهرسطر افقی برابر ۱، ومجموع عددها درهرستون قائم برابر ۲ شده است. آیا ممکن است مساحت این مستطیل، برابر ۱۹۸۶ سانتی‌مترمربع باشد؟

۳۱.۲. آیا درست است که:

الف) از ۱۰۰ عدد درست، همیشه مـی‌توان دوعـدد طوری انتخاب کرد که، مجموع آن‌ها، بر ۷ بخش‌پذیر باشد؛

ب) از ۵ عدد درست، همیشه می‌توان دوعدد طوری انتخاب کرد که، تفاضل مجذورهای آن‌ها، بر ۷ بخش‌پذیر باشد؟

۳۲.۲. طول هرسه ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای، با عددهای درست بیان می‌شود. آیا ممکن است طول هریك ازدوضلع مجاوربه‌زاویهٔ قائمه، عددی فرد باشد؟

۳۳.۲. سه عدد اول طوری پیدا کنید که حاصل‌ضرب آن‌ها، پنج برابر مجموع آن‌ها باشد.

۳۴.۲. همهٔ عددهای اول p را پیدا کنید، به‌نحوی که:

الف) عدد $p^۲+۱۳$؛ ب) عدد $p^۲+۱۴$، اول باشد.

۳۵.۲. مرکب بودن هریك ازاین عددها را ثابت کنید:

الف) $۲^{۳^{۱۹۸۷}}+۱$؛ ب) $۲^{۳^{۱۹۸۷}}-۱$

۳۶.۲. هریك از این معادله‌ها را، در مجموعهٔ عددهای درست، حل کنید:

الف) $x^۲=y^۲+۲y+۱۳$؛ ب) $x^۲-۳xy+۲y^۲=۳$

۳۷.۲. ثابت کنید، معادلـه‌های زیـر، درمجموعهٔ عـددهای درست،

جواب ندارند:

الف) $y^2=5x^2+6$ ؛ ب) $2^x-1=y^2 (x>1)$

۰۳۸۰۲ مجموع چند عدد درست بر ۶ بخش‌پذیر است. ثابت کنید، مجموع مکعب‌های آن‌ها هم، بر ۶ بخش‌پذیر می‌شود.

۰۳۹۰۲ ثابت کنید، برای عددهای درست m و n، عدد m^5n-mn^5 بر ۳۰ بخش‌پذیر است.

۰۴۰۰۲ ثابت کنید، اگر عدد $a-1$ بر k^m بخش‌پذیر باشد، آن وقت عدد a^k-1 بر k^{m+1} بخش‌پذیر است (a، k و m، عددهای طبیعی‌اند).

۰۴۱۰۲ سه‌رقم آخر عدد زیر را پیدا کنید:

$$1^{100}+2^{100}+3^{100}+\ldots+999998^{100}+999999^{100}$$

۰۴۲۰۲ چهار عدد طبیعی متوالی طوری پیدا کنید که، هر کدام از آن‌ها، بر مجذور یك عدد درست بزرگتر از واحد بخش‌پذیر باشد.

۰۴۳۰۲ شش عدد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را روی محیط دایره به ردیفی بنویسید که، برای هر سه عدد a، b و c، که در ردیف هم باشند، عدد b^2-ac بر ۷ بخش‌پذیر شود.

۰۴۴۰۲ n را طوری پیدا کنید که، به ازای آن، عدد $n^4+(1+n)^4$، عددی مرکب باشد.

۰۴۵۰۲ ثابت کنید، هر یك از عددهای زیر، برای عدد طبیعی $n>1$، مرکب است:

الف) n^4+4 ؛ ب) n^5+n^4+1

۰۴۶۰۲ چندجمله‌ای x^9+x^4-x-1 را به‌صورت ضرب پنج عامل با ضریب‌های درست تجزیه کنید.

۰۴۷۰۲ ثابت کنید، چند جمله‌ای $(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1$ بر چند جمله‌ای $x(x+1)(2x+1)$ بخش‌پذیر است.

۰۴۸۰۲ چند جمله‌ای $x^n-ax^{n-1}+bx-1$، به‌ازای چه‌مقدارهایی

از a و b، بر $(x-۱)^۲$ بخش‌پذیراست؟

۴۹۰۲. درتقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x-۱$ و $x-۲$، به‌ترتیب، به‌باقی مانده‌های ۳ و ۵ رسیده‌ایم. ازتقسیم $f(x)$ بر $(x-۲)(x-۱)$، چه باقی مانده‌ای به‌دست می‌آید؟

۵۰۰۲. ثابت کنید، اگربرای چندجمله‌ای باضریب‌های درست $f(x)$، مقدارهای $f(۰)$ و $f(۱)$ عددهایی فرد باشند، آن وقت $f(x)$، ریشهٔ درست ندارد.

۵۱۰۲. درمورد چند جمله‌ای با ضریب‌های درست $f(x)$ می‌دانیم:

$$|f(۳)|=|f(۷)|=۱$$

ثابت کنید، چند جمله‌ای $f(x)$، ریشهٔ درست ندارد.

۵۲۰۲. $f(x)$، یك چند جمله‌ای است ازدرجهٔ ۷ باضریب‌های درست. ثابت کنید، اگرمقدار $f(x)$ به‌ازای پنج عدد درست مختلف x، ازلحاظ قدر مطلق برابر واحد باشد، آن وقت این چند جمله‌ای را نمی‌توان به ضرب دوچند جمله‌ای (از درجهٔ بالاتر ازصفر) با ضریب‌های درست تجزیه کرد.

۵۳۰۲. آیا عدد طبیعی n وجود دارد، به‌نحوی که، به‌ازای‌آن، عدد $۳^n+۱$ بر،

الف) $۵^{۱۰۰۰}$؛ ب) $۱۰^{۱۰۰۰}$

بخش‌پذیر باشد؟

۵۴۰۲. تعداد زیادی کارت دراختیارداریم و روی هر کدام از آن‌ها، یکی ازعددهای ۲، ۳، ۵، ۷ را نوشته‌ایم. آیا می‌توان

الف) ۱۵ کارت؛ ب) ۱۶ کارت

را طوری به ردیف چید، به نحوی که با ضرب چند عدد مجاور هم، مجذور کاملی به‌دست نیاید؟

ج) حداکثرتعداد کارت‌هایی را پیدا کنیدکه اگر،روی هرکدام ازآن‌ها، یکی از n عدد اول نخستین را نوشته باشیم، بتوان آن‌ها را به ردیفی قرار دادکه این شرط برقرارباشد.

۵۵۰۲. درهر نقطهٔ بامختصات‌درست (x, y) ازصفحهٔ مختصاتی Oxy، یك درخت روییده است. دراین جنگل جاده‌ای کشیده‌ایم که هیچ درختی را قطع نمی‌کند ومرزهای‌آن خطهای راستی است که با خط راست

الف) $۳y = ۵x$؛ ب) $ax = by$

موازی است (a و b دوعدد طبیعی مفروض‌انـد). حداکثرعرض این جاده، چقدرمی‌تواند باشد؟ (ازکلفتی تنهٔ درختها، صرف نظرمی‌کنیم.)

۵۶۰۲. الف) برای معادلهٔ $x^۲ + ۲y^۲ = z^۲$، در مجموعـهٔ عددهای درست، چهارجواب (x, y, z) را، به‌نحوی پیدا کنیدکه، عددهای x و y و z، دوبه‌دونسبت به هم اول باشند.

ب) ثابت‌کنید، تعداد این‌گونه جوابها، بی‌نهایت است.

۵۷۰۲. عدد طبیعی $n \geqslant ۷$ دارای ایـن ویژگی است: همهٔ عـددهای طبیعی کوچکترازn، کـه نسبت بـه n اول‌اند، تشکیل یـك تصاعد حسابی می‌دهند. ثابت‌کنید، عدد n، یا عددی است اول و یا توانی از۲.

۵۸۰۲. الف) عددی دورقمی پیداکنید، به‌نحوی‌که دورقم‌آخرمجذور آن، منطبق برخود عدد باشد.

ب) ثابت‌کنید، برای هرعدد طبیعی n، عددی n رقمی وجود داردکه برn رقم‌آخرمجذور خود منطبق است (عدد n رقمی، می‌تواند با صفر آغاز شود).

۵۹۰۲. الف) ده جـواب (x, y, z) را، درمجموعهٔ عددهای طبیعی، برای معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۳xyz$ پیدا کنید.

ب) ثابت‌کنید، بی‌نهایت جواب ازاین‌گونه وجود دارد.

۶۰۰۲. ثابت کنید، عدد $(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})^{۱۹۸۷}$ را مـی‌توان بـه صورت $a\sqrt{۳} - b\sqrt{۲}$ نوشت‌که، در آن، a و b عددهای درستی هستند، به نحوی که $۳a^۲ - ۲b^۲ = ۱$.

۶۱۰۲. x و y را عددهایی درست و M را مجموعهٔ عددهای طبیعی به‌صورت $x^۲ + xy + y^۲$ فرض می‌کنیم.

الف) ثابت کنید، حاصل ضرب هردو عدد از M، خود عضوی از M است.

ب) عددی را درمجموعهٔ M، عدد پایه می‌نامیم که از واحدبزرگتر باشد و، به‌جزخودش، برهیچ یك ازعددهای مجموعهٔ M بخش‌پذیر نباشد. آیا عضوی از M وجود داردکه بتوان‌آن را به‌دو طریق مختلف، به‌صورت ضرب دوعدد پایه نوشت؟

۶۲۰۳. برای معادلهٔ $x!y! = z!$، پنج جواب (x, y, z) را، در مجموعهٔ عددهای طبیعی پیدا کنید. (منظوراز $n!$، حاصل ضرب همهٔ عددهای از ۱ تا n است: $n! = ۱ \times ۲ \times \ldots \times n$.)

۳

ساختمان‌های هندسی در صفحه و در فضا

۱.۳. با استفاده از پرگار و خط‌کش و تنها با رسم ۶ خط (خط راست و دایره)، پاره خط راست مفروض AB را به‌چهار بخش برابر تقسیم کنید.

۲.۳. دو نقطهٔ A و B روی صفحه داده شده‌اند. بدون استفاده از خط‌کش و تنها به‌کمك پرگار، وسط پاره‌خط راست AB را پیدا کنید.

۳.۳. طول‌های دوضلع مثلث، به‌ترتیب، برابرند با a و b $(b>a)$ و می‌دانیم، زاویهٔ روبه‌رو به‌یکی ازاین ضلع‌ها، ۳ برابر زاویهٔ روبه‌رو به‌ضلع دیگراست. به‌کمك پرگار و خط‌کش، مثلث را رسم کنید.

۴.۳. به‌کمك پرگار و خط‌کش، دایره‌ای به‌شعاع مفروض، چنان رسم کنیدکه برخط راست مفروض و دایرهٔ مفروضی مماس باشد.

۵.۳. به‌کمك پرگار و خط‌کش، دایره‌ای رسم کنیدکه بردوخط موازی مفروض l و m و بردایرهٔ مفروض به‌شعاع r، واقع در بین l و m، مماس باشد.

۶.۳. نقطهٔ F در درون زاویهٔ حادهٔ AOB داده شده است. نقطهٔ M را، به‌کمك پرگارو خط‌کش، روی ضلع OA طوری پیدا کنیدکه ازنقطهٔ F و ضلع دیگر زاویه، OB، به‌یك فاصله باشد.

۷۰۳. پاره خط راستی به‌طول واحد، روی صفحه داده شده است. به‌کمک پرگار و خط‌کش، پاره خط راستی به‌طول $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ بسازید.

۸۰۳. خط‌کشی داریم که، روی‌آن، تقسیم‌های یك سانتی‌متری وجود دارد. تنها به کمك همین خط‌کش، خط راستی رسم کنید که برخط راست مفروضی عمود باشد.

۹۰۳. متوازی‌الاضلاع $OBCA$ داده شده است. خط راستی رسم کرده‌ایم که از ضلع OB یك سوم‌آن وازضلع OA یك‌چهارم‌آن را، با محاسبهٔ ازنقطهٔ O، جدا کرده‌است. این‌خط راست، چه‌بخشی‌ازقطر OC را جدامی کند؟

۱۰۰۳. دوخط راست موازی و دونقطهٔ A و B روی یکی از آن‌ها داده شده است. پاره خط راست AB را، تنها به‌کمك خط‌کش، به ۳ بخش برابرتقسیم کنید.

۱۱۰۳. چهارضلعی محدبی داده‌شده است. دوخط راست رسم‌کرده‌ایم که دوضلع مقابل‌آن را، به سه بخش برابرتقسیم کرده‌اند. ثابت‌کنید، بین این دوخط راست، یك سوم مساحت چهارضلعی واقع است.

۱۲۰۳. A، B و C رأس‌های یك مثلث‌غیرمتساوی‌الساقین را تشکیل می‌دهند. نقطهٔ D را روی صفحهٔ مثلث به‌چند طریق می‌توان پیدا کرد، به‌نحوی که مجموعهٔ نقطه‌های $\{A,B,C,D\}$، محورتقارن داشته باشد؟

۱۳۰۳. ازنقطهٔ دلخواه M، واقع دردرون زاویهٔ‌حادهٔ A، عمودهای MP و MQ را بر ضلع‌های آن فرود آورده‌ایم. ازنقطهٔ A، عمود AK را برپاره‌خط PQ رسم‌کرده‌ایم. ثابت‌کنید، دو زاویهٔ PAK و MAQ برابرند.

۱۴۰۳. یك ده ضلعی منتظم، به‌کمك پرگارو خط‌کش رسم کنید.

۱۵۰۳. دایره‌ای رسم ومحیط‌آن را به‌۱۲ بخش برابرتقسیم‌کنید. یکی ازاین نقطه‌ها، A را، درنظربگیرید، ازآن جا به‌همهٔ نقطه‌های دیگرتقسیم وصل ومماس در A بردایره را رسم کنید. دسته‌ای شامل ۱۲ خط راست به‌دست می‌آیدکه ازنقطهٔ A گذشته‌اند.

الف) ثابت کنید، این خطهای راست، صفحه را به ۲۴ زاویهٔ برابر

تقسیم می‌کنند.

ب) نقطهٔ دیگر B را، از نقطه‌های تقسیم واقع برمحیط دایره درنظر بگیرید و، شبیه قبل، دسته‌ای شامل ۱۲ خط راست بسازید. ثابت کنید، ۱۱۰ نقطه‌ای که ازبرخورد این ۲۳ خط راست به‌دست می‌آید (بدون در نظر گرفتن نقطه‌های A و B)، روی محیط ۱۱ دایره قرار دارند، هر ۱۰ نقطه روی محیط یك دایره.

۱۶۰۳. ازگوشهٔ میز بیلیارد مستطیلی با اندازه‌های $m\times n$ (m و n، عددهایی طبیعی‌اند)، توپ بیلیارد، تحت زاویهٔ ۳۰ درجه با دیوارهٔ میز، آغاز به‌حرکت می‌کند. ثابت کنید، توپ بیلیارد، هرگز به گوشهٔ دیگری از میز نمی‌رسد. (روشن است که توپ بیلیارد را، نقطه به‌حساب می‌آوریم.)

۱۷۰۳. چهارنقطه روی یك صفحه‌اند. آیا ممکن است:

الف) فاصلهٔ دوبه‌دوی آن‌ها، به‌ترتیب، برابر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ سانتی‌متر بشود؟

ب) از این فاصله‌های دوبه‌دوی نقطه‌ها، پنج تا برابر ۱ و ششمی برابر ۱/۸ سانتی‌متر باشد؟

۱۸۰۳. چهار خط راست، صفحه را به چند بخش تقسیم می‌کنند؟

۱۹۰۳. فضا را به‌چند بخش تقسیم می‌کنند:

الف) چهار صفحه؛

ب) پنج صفحه، به‌شرطی که همهٔ صفحه‌ها از یك نقطه بگذرند (هیچ سه صفحه‌ای، دریك خط راست، مشترك نیستند)؟

۲۰۰۳. یك کُنج محدب چهاروجهی مفروض است. صفحه‌ای را پیدا کنید که، مقطع آن با این کنج، یك متوازی‌الاضلاع باشد.

۲۱۰۳. ثابت کنید، برای هر منشور با قاعدهٔ مثلثی و ارتفاع به قدر کافی بزرگ، می‌توان صفحه‌ای پیدا کرد که، دربرخورد با یال‌های جانبی منشور، مثلث متساوی‌الاضلاعی به‌وجود آورد.

۲۲۰۳. شهریار یك چند وجهی محدب مقوائی را، روی یال‌های آن

برید و وجه‌های به‌دست‌آمده را، با پست، بـرای شروین فرستاد. شروین با این وجه‌ها، یك چند وجهی محدب ساخت. آیا ممکن است چند وجهی‌های شهریار و شروین با هم فرق داشته باشند؟

۲۳.۳. آیا یك نه‌وجهی محدب وجـود دارد، به‌نحوی که هرنه وجه آن، چهارضلعی باشند؟

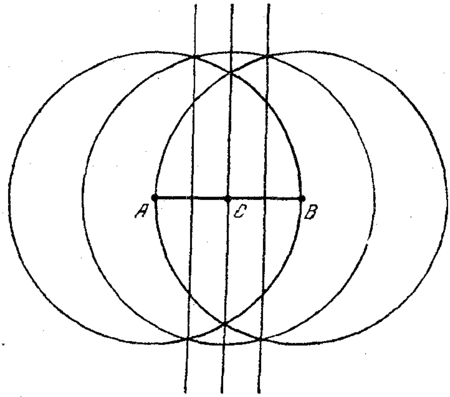
۲۴.۳. بعد از گستردن یـك هرم، مثلثی با زاویـه‌های حاده به‌دست آمده‌که، در آن، وسط سه ضلع مثلث بـه هم وصل شده است. ثابت کنید، مکعب مستطیلی وجود داردکه، چهار رأس غیرمجاورآن، بر رأس‌های این هرم منطبق‌اند.

۲۵.۳. کنجی سه‌وجهی به‌رأس O و زاویـه‌های دو وجهی برابر α، β و γ مفروض است. از رأس O، نیم خط‌هـای راستی عمود بر هر یك از وجه‌های‌آن رسم کرده‌ایم، به نحوی‌که به طرف بیرون امتداد داشته باشند (یعنی، هرنیم خط راست عمود وخودکنج، نسبت به‌صفحهٔ وجه، دردوطرف قرار گرفته باشند). زاویه‌های مسطحهٔ کنجی که با این سه‌نیم خط به‌دست می‌آید، پیدا کنید.

بحث و بررسی مسأله‌ها

مسألهٔ ۱.۳. دودایره به‌شعاع AB وبه‌مرکزهای AوB رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو دایره را، بـا خط راستی بـه‌هم وصل می‌کنیم تا پاره‌خط راست AB را در C قطع کند. اکنون دایره‌ای به‌مرکز C و شعاع AB رسم می‌کنیم. این دایره، هریك از دو دایـرهٔ قبلی را در دونقطه قطع می‌کند. اگردونقطهٔ برخورد با هـردایره را با خط راستی به‌هم وصل کنیم، پاره خط راست AB به‌چهاربخش برابرتقسیم می‌شود (شکل ۱۱).

به‌این‌ترتیب، ۶ خط رسم شده‌است: سه دایره و سه‌خط راست. ثابت می‌کنیم، این سه‌خط راست، پاره خط راست AB را به‌چهاربخش برابرتقسیم می‌کنند.



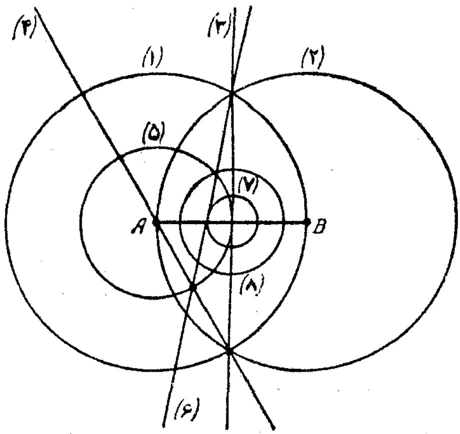
شکل ۱۱

می‌دانیم، مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که ازدوانتهای پاره خط راست به‌یك فاصله باشند، عبارت است از خط راست عمود منصف AB. دو نقطهٔ برخورد دودایرهٔ اول، ازدوانتهای پاره‌خط راست AB به‌یك‌فاصله‌اند (به‌فاصلهٔ برابرطول AB) و، بنابراین، خطراستی که ازاین‌دونقطه می گذرد بر AB عمود است وآن را درنقطهٔ C نصف می کند.

به‌همین ترتیب، نقطه‌های برخورد دایرهٔ سوم با یکی از دو دایرهٔ قبلی، ازنقطهٔ C و یکی از دوانتهای AB به‌یك فاصله‌اند و، بنابراین، خط راستی که ازاین دونقطه بگذرد، نصف پاره خط راست AB را، به دو بخش برابرتقسیم می کند.

∇ انجام یك ساختمان‌هندسی، به‌کمك پرگاروخط کش، به‌این معناست که حل مسأله را، به‌انجام متوالی برخی ازعمل‌های زیرمنجرکنیم:

I. خط راستی از دونقطهٔ مفروض بگذرانیم؛ II. دایره‌ای با مرکز و شعاع مفروض رسم‌کنیم؛ III. نقطه‌های برخورد: الف) دوخطراست، ب) خط راست و دایره، ج) دو دایره را به‌دست‌آوریم.



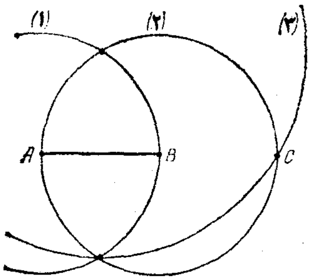
شکل ۱۲

درمسألهٔ ما، دنبالهٔ این عمل‌ها، به‌این ترتیب است: II، II، III ج)، I، III الف)، II، III ج)، III ج)، I، I، III الف)، III الف). در ضمن، شرط مسأله برقراراست: تعداد عمل‌های I و II برابراست با شش.

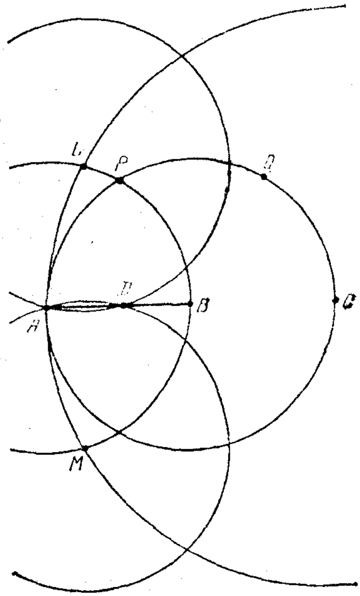
دربارهٔ این مسأله فکرکنیدکه، برای تقسیم یك پاره خط راست به ۳ یا ۵ بخش برابر، به‌کمترین تعداد ازعمل‌های I وII نیازباشد. درشکل۱۲، روش تقسیم پاره‌خط راست، به ۶ بخش برابرنشان داده شده است؛ در این روش، تعداد عمل‌های I و II برابراست با ۸.

مسألهٔ ۲۰۳. ابتدا پاره‌خط راست AB را دوبرابر می‌کنیم، یعنی نقطهٔ C را روی خط راست AB طوری پیدا می‌کنیم که داشته‌باشیم: $AB=BC$. برای این‌منظور، دایره‌ای به‌مرکز B وشعاع $r=BA$ رسم می‌کنیم. سپس، با آغازازنقطهٔ A، روی محیط ایـن دایره، پشت سرهم، نقطه‌های P، Q و C را طوری علامت می‌گذاریم‌که داشته باشیم (شکل ۱۳):

$$AP=PQ=QC=r$$



شکل ۱۴



شکل ۱۳

مثلث‌های ABP، PBQ و QBC متساوی‌الاضلاع‌اند و، بنابراین، زاویهٔ ABC برابر ۱۸۰ درجه می‌شود. به‌این ترتیب، نقطهٔ C روی خط راست AB واقع است وداریم: $AB=BC$. اکنون، با توجه به نقطه‌های A، B و C، وسط پاره‌خط راست AB را پیدا می‌کنیم. دایره‌ای به‌مرکزنقطهٔ C و به‌شعاع $CA=2r$ رسم می‌کنیم (شکل ۱۳ را ببینید). L و M، نقطه‌های برخورد این دایره را با دایرهٔ به‌مرکز A وشعاع $AB=r$ علامت می‌گذاریم. سپس، دودایره به‌مرکزهای L و M وشعاع $AB=r$ رسم می‌کنیم. این‌دودایره، درنقطهٔ Aو، همچنین، درنقطهٔ دیگر D یکدیگر را قطع می‌کنند. ثابت می‌کنیم، نقطهٔ D، وسط پاره خط راست AB است.

درواقع، نقطه‌های L و M، نسبت به‌خط‌راست AC قرینهٔ یکدیگرند؛ درضمن، نقطهٔ D از دو نقطهٔ L و M به‌یک فاصله است، یعنی روی خط راست AC قراردارد. اکنون، دومثلث متساوی‌الساقین ALD و CAL را درنظرمی‌گیریم. این‌دومثلث باهم متشابه‌اند، زیرا درزاویهٔ مجاور به‌قاعده،

یعنی A، مشترک‌اند. بنابراین

$$AD:AL = AL:CA \Rightarrow AD:r = r:۲r$$

که از آن جا به‌دست می‌آید: $۲AD = AB = r$.

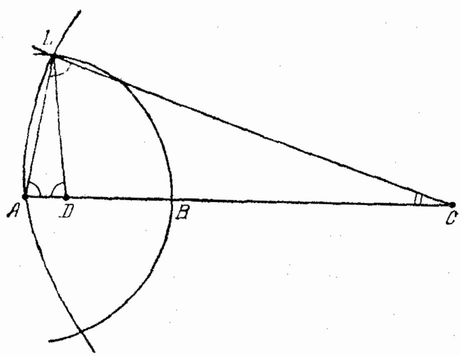
▽ درآغاز حل **مسألهٔ ۲.۳**، با رسم چهاردایره، پاره خط راست AB را دوبرابر کردیم (ونقطهٔ C را، به‌دست‌آوردیم). این ساختمان را، می‌توان اقتصادی‌تر وتنها با رسم سه دایره انجام داد (شکل ۱۴ را ببینید).

مسألهٔ ۲.۳ را می‌توان تعمیم داد: روشی پیداکنید که، به‌کمک‌آن، بتوان پاره‌خط راست مفروض را به n بخش برابرتقسیم‌کرد.

به‌همان ترتیب، پاره خط راست $AC = nAB$ را می‌سازیم. سپس، بازهم به‌همان‌ترتیب، به‌وسیلهٔ نقطه‌های A، B و C، نقطهٔ D را پیدامی‌کنیم (شکل ۱۵). از تشابه مثلث‌های متساوی‌الساقین ALD و ACL به دست می‌آید:

$$DA.CA = r^۲$$

(دراین حالت $CA = nr$ و $DA = \frac{r}{n}$).



شکل ۱۵

این ساختمان، به تبدیلی از صفحه مربوط می‌شود که، انعکاس نسبت به‌دایرهٔ به‌مرکز A وشعاع $AB=r$ نام دارد. مبدل نقطهٔ P، دراین تبدیل، عبارت است ازنقطهٔ P' واقع برنیم خط راست AP، به نحوی‌که برای آن داشته باشیم:

$$AP'.AP=r^{۲}$$

درمسألهٔ ۲.۳، درواقع، نقطهٔ D را به‌عنوان‌مبدل‌نقطهٔ C، ضمن یك‌انعکاس، به‌دست آورده‌ایم.

تبدیل به‌کمك انعکاس، ویژگی جالبی دارد: دراین تبدیل، خط‌راست به‌دایره و، دوباره، دایره به‌خط راست تبدیل می‌شود.

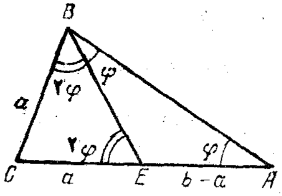
با استفاده از انعکاس، می‌توان ثابت‌کردکه، عمل‌های III الف) و III ب) را (یعنی پیداکردن نقطه‌های برخورد دوخط راست وخط راست با دایره)، که دربارهٔ آن‌ها دربحث مسألهٔ قبل صحبت‌کردیم، می‌توان تنها با یك پرگارانجام داد. ازاین جا می‌توان نتیجه‌گرفت: هر مسألهٔ ساختمانی راکه بتوان به‌کمك پرگار وخط‌کش حل‌کرد، می‌توان تنها به‌کمك یك‌پرگار هم حل کرد (قضیهٔ ماسکه‌رونی). درضمن باید توجه کرد که، عمل I را (یعنی رسم خط راستی‌که از دونقطه می‌گذرد) نمی‌توان تنها به‌کمك پرگار انجام داد. درواقع، باید شرط کردکه، اگردونقطه ازخط‌راستی معلوم باشد، خود خط راست معین است.*

مسألهٔ ۳.۳. فرض می‌کنیم، مثلث ABC، با فرض $\hat{B}=۳\hat{A}$، رسم شده باشد (شکل ۱۶). ازنقطهٔ B، پاره‌خط راست BE را تا خط راست AC طوری رسم می‌کنیم که داشته‌باشیم: $\widehat{ABE}=\widehat{BAC}$. مثلث ABE متساوی‌الساقین است و $BE=AE$. مثلث BCE هم متساوی‌الساقین می‌شود، زیرا در آن، دو زاویهٔ BEC و CBE برابرند (هرکدام‌دوبرابر زاویهٔ BAC)؛

* برای آگاهی بیشتر دراین زمینه وزمینه‌های مشابه‌آن کتاب‌های هندسهٔ پرگار و نظریهٔ **ساختمان‌های هندسی** ترجمهٔ پرویزشهریاری را ببینید. — م.

بنابراین

$$BC = CE = a \Rightarrow$$
$$AE = EB = b - a$$



شکل ۱۶

در مثلث BCE، طول هرسه ضلع معلوم است. بنابراین، می‌توان آن را به‌کمك پرگاروخط‌کش رسم کرد. بعد پاره خط راست CE را بـه‌اندازهٔ EA (که بـرابـر $b-a$ است) ادامه می‌دهیم، مثلث ABC به‌دست می‌آید.

در واقع، درچنین مثلثی، روشن است که $BC = a$ و $AC = b$. ثابت می‌کنیم، زاویهٔ ABC، سه‌برابرزاویهٔ BAC است. مثلث BAE، متساوی‌الساقین است: $AE = EB = b - a$؛ بنابراین، دو زاویهٔ BAE و ABE برابرند. سپس، زاویهٔ BEC، به‌عنوان زاویهٔ خارجی مثلث AEB، دوبرابر زاویهٔ BAC می‌شود. چون‌مثلث BCE متساوی‌الساقین‌است $(BC = CE)$، زاویهٔ CBE هم‌دوبرابر زاویهٔ BAC خواهدشد. ودرنتیجه $\widehat{ABC} = ۳\widehat{BAC}$.

مسأله وقتی جواب داردکه بتوان به‌کمك پاره‌خطهای راست a، a و $b-a$ یك مثلث ساخت؛ یعنی وقتی کـه $a < b < ۳a$. با این شرط، مسأله جوابی منحصربه‌فرد دارد.

▽ حل‌مسأله، که دراین‌جاآوردیم، شامل چهاربخش است‌که‌می‌توان، آن‌هـا را، ایـن طـور نام‌گذاری کـرد: ۱) تجزیه‌وتحلیل، ۲) ساختمان، ۳) اثبات، ۴) بحث و بررسی. معمولاً، همهٔ مسأله‌های ساختمانی هندسه، دارای همین چهارمرحله‌اند.

مسألهٔ ۴۰۳. مکان هندسی مرکزهای دایره‌های با شعاع مفروض r که برخط راست مفروضی مماس باشند، عبارت است از دو خط راست l_1 و l_2 موازی با این خط راست و به‌فاصلهٔ r ازآن.

دایرهٔ مفروض را به‌شعاع R و بـه مرکز O می‌گیریم. مکان هندسی

مرکزهای دایره‌های با شعاع r که بر دایرهٔ مفروض مماس باشند، عبارت است از: ۱) به‌شرط $R>r$، محیط دو دایرهٔ به‌شعاع‌های $R+r$ و $R-r$ و به مرکز O؛ ۲) به‌شرط $R=r$، محیط دایرهٔ به‌شعاع $R+r$ و به‌مرکز O، و خود نقطهٔ O؛ ۳) به‌شرط $R<r$، محیط دایرهٔ به شعاع $R+r$ و به مرکز O.

مرکز دایرهٔ مجهول، درمحل برخورد این دومکان هندسی قراردارد. از آن جاکه، دو خط راست موازی با دو دایره، حداکثر ۸ نقطهٔ برخورد دارند، بنابراین، تعداد جواب‌های مسألهٔ ۴.۳، می‌تواند از ۰ تا ۸ باشد (تحقیق کنید، همهٔ این حالت‌ها، ممکن است).

∇ مسألهٔ ۴.۳ را با روش مکان‌های هندسی حل کردیم.

این روش را می‌توان این طورشرح داد. فرض‌کنید، نقطهٔ X، که باید آن را پیداکنیم، بنا به‌خواست‌های مسأله، بادوشرط معین شود. ابتدا مکان هندسی نقطه‌هایی را پیدا می‌کنیم که، تنها، با شرط اول سازگارند. سپس، مکان هندسی نقطه‌هایی را جست‌وجو می‌کنیم که، تنها، با شرط دوم سازگار باشند. نقطه‌های مشترك این دو مجموعه، درهردوشرط صدق می‌کنند و، بنابراین، نقطهٔ مجهول X را به‌دست می‌دهند.*

برای حل مسألهٔ ۴.۳، باید نقطهٔ X مرکزدایره را پیداکرد. دوشرط را ازهم جدا می‌کنیم: ۱) X به‌فاصلهٔ r ازمحیط دایرهٔ مفروض قراردارد، و ۲) X به‌فاصلهٔ r ازخط راست مفروض واقع است. با پیداکردن مکان‌هندسی نقطه‌هایی که با این شرطها سازگارند، موضع‌های ممکن نقطهٔ X به دست می‌آید.

مسألهٔ ۵.۳. چون دایرهٔ مورد نظر، باید بر دو خط راست موازی l و m مماس باشد، بنابراین، مرکزآن K، روی خط راستی است که با l و m موازی و ازآن‌ها به‌یك فاصله باشد. شعاع R این دایره، برابراست بانصف فاصلهٔ بین دوخط راست موازی l و m. ازطرف دیگر، دایرهٔ مجهول، باید

---

* برای آگاهی بیشتر از روش مکان‌های هندسی، به‌کتاب **خلاقیت ریاضی** ترجمهٔ پرویز شهریاری مراجعه کنید. ــ م.

بردایرهٔ مفروض مماس باشد، یعنی نقطهٔ K، مرکزآن، باید به‌فاصلهٔ $R+r$ یا $R-r$ (اگر $R \geqslant r$) ازنقطهٔ O باشد؛ بنابراین، نقطهٔ K روی محیطیکی از دو دایرهٔ به مرکز O وشعاع $R+r$ و $R-r$ قراردارد.

ساختمان را می‌توان به‌این ترتیب انجام داد. خط راستی موازی l و m و به‌یك فاصله ازآن‌ها (بین دوخط راست l و m) رسم می‌کنیم، سپس، دو دایرهٔ به‌مرکز O وشعاع‌های $R+r$ و $R-r$ (اگر $R>r$) را می‌کشیم. نقطهٔ K، محل برخورد خط راست با یکی ازاین دو دایره خواهد بود.

▽ این‌مسأله، ارتباط نزدیکی با مسألهٔ مشهورآپولونیوس (حدود ۲۰۰ سال پیش ازمیلاد) دارد: سه‌دایره داده شده است، می‌خواهیم دایرهٔ چهارمی رسم کنیم که براین‌سه‌دایره مماس باشد. این‌مسألهٔ دشواررا، می‌توان به‌کمك تبدیل انعکاسی، به‌مسألهٔ ۵.۳ منجر کرد.

برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم سه‌دایرهٔ مفروض، دربیرون یکدیگرباشند. اگرشعاع‌های این دایره‌ها را به‌یك اندازه بزرگ کنیم، جای مرکز دایره‌ای که باید برآن‌ها مماس باشد، تغییرنمی‌کند. شعاع‌های آن‌هارا تا جایی بزرگ می‌کنیم که دوتا از دایره‌ها برهم مماس شوند. سپس، انعکاس تمامی صفحه را، نسبت بـه‌دایره‌ای بـه مرکزنقطهٔ تماس این دو دایره پیدا می‌کنیم (بحث مسألهٔ ۲.۳ را ببینید). دراین تبدیل، دو دایرهٔ مماس برهم، به‌دوخط راست موازی، و دایرهٔ سوم، به‌یك دایره تبدیل می‌شوند.

با حل مسألهٔ ۵.۳، برای این خط‌های راست ودایره و، سپس، درنظر گرفتن یك انعکاس معکوس، می‌توانیم دایرهٔ مورد نظر آپولونیوس را پیدا کنیم.*

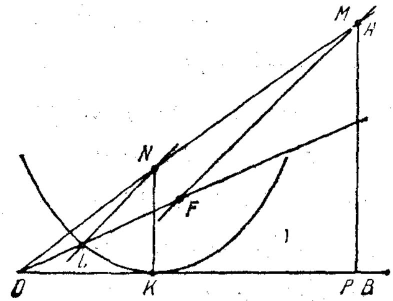
مسألهٔ ۶.۳. خط راست OF را رسم مـی‌کنیم ونقطه‌ای مانند N را روی نیم خط راست OA علامت می‌گذاریم. ازنقطهٔ N، عمود NK را بر خط راست OB فرود می‌آوریم. دایره‌ای به‌مرکز N و به‌شعاع NK رسم

---

* برای آگاهی بیشتر درمورد مسألهٔ **آپولونیوس** و راه‌حل‌های مختلف آن، کتاب «**نظریهٔ ساختمان هندسی**» را ببینید. ــم.

می‌کنیم. L را یکی از نقطه‌های برخورد محیط این دایره با نیم خط راست OF می‌گیریم. از نقطهٔ F، خط راستی موازی با NL رسم می‌کنیم. نقطهٔ M، محل برخورد این خط راست با نیم خط راست OA، همان نقطهٔ مورد نظر است (شکل ۱۷ را ببینید).

در واقع، تجانس به‌مرکز O، که نقطهٔ L را به‌نقطهٔ F تبدیل می‌کند، با توجه به موازی بودن خطهای راست متناظر، نقطهٔ N را به نقطهٔ M و نقطهٔ K را به‌نقطهٔ P تبدیل خواهد کرد (P، پای عمودی است که از M بر OB رسم کرده‌ایم). بنابراین، از برابری $NK = NL$، برابری $MF = MP$ نتیجه می‌شود.



شکل ۱۷

مسأله دوجواب دارد (دایرهٔ به‌مرکز N و به‌شعاع NK، خط OF را، در دونقطه قطع می‌کند).

▽ مسألهٔ ۶.۳ را، با روش تشابه حل کردیم. این روش را، می‌توان به‌این صورت، توضیح داد. ابتداشکلی می‌سازیم که باشکل مورد نظرمتشابه باشد، سپس، آن را به‌نسبت لازم، بزرگ (یا کوچک) می‌کنیم.*

درمسألهٔ ۶.۳، ابتدا خط شکستهٔ KNL را ساختیم (که برای آن،

* برای آگاهی بیشتر، دربارهٔروش تشابه، کتاب «خلاقیت ریاضی» را ببینید.ـ م.

شرط مسأله برقراربود) و، سپس، خط‌شکستهٔ PMF را متشابه باآن، طوری پیدا کردیم که ازنقطهٔ F بگذرد.

روش مکان‌های هندسی را (بحث مسألهٔ ۴.۳ را ببینید)، برای حل مسألهٔ ۶.۳، آزمایش می‌کنیم. معلوم می‌شود، مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه، که ازیك نقطه ویك خط راست، به‌یك فاصله باشند، عبارت است از یك سهمی.

برای این که در این مورد قانع شویم، از روش مختصاتی استفاده می‌کنیم. فاصلهٔ ازنقطهٔ F تاخطراست OB را h می‌گیریم. دستگاه‌مختصات Oxy را طوری انتخاب می‌کنیم که، محور Ox بر OB واقع باشد ومحور Oy از F بگذرد. دراین صورت، نقطهٔ $(x،y)$، که ازنقطهٔ F وخط راست OB به‌یك فاصله است، باید در معادلهٔ $|y|=\sqrt{x^۲+(y-h)^۲}$ صدق کند با مجذور کردن دو طرف برابری، به معادله سهمی $y=\frac{۱}{۲h}x^۲+\frac{۱}{۲}h$ می‌رسیم.

بنابراین، نقطهٔ مورد نظرمسألهٔ ۶.۳، درنقطهٔ برخورد سهمی با خط راست OA قراردارد. البته، ما نمی‌توانیم سهمی را به کمك پرگار و خط کش رسم کنیم، ولی نقطه‌های برخوردآن را با یك خطراست، می‌توانیم با توجه به‌حل مسألهٔ ۶.۳، به‌دست آوریم.

مسألهٔ ۷.۳. ۱) اگر زاویهٔ قائمه‌ای رسم وروی ضلع‌های آن، ازنقطهٔ رأس، پاره‌خط‌های راستی به‌طول واحد جداکنیم، با وصل انتهای این دوپاره خط راست به‌هم، پاره خط راستی به‌طول $\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید.

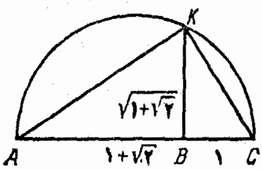
۲) روی خط راستی، پاره‌خط راست AB را به‌طول $\sqrt{۲}+۱$ و، سپس، درامتداد آن، پاره خط راست BC را به‌طول واحد، جدا می‌کنیم (شکل ۱۸).

۳) دایره‌ای به‌قطرپاره خط راست AC رسم می‌کنیم.

۴) ازنقطهٔ B، عمودی برقطر AC رسم می‌کنیم.

اگر K، یکی ازنقطه‌های برخورد این عمود با محیط دایره باشد، طول

پاره خط راست BK برابر $\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$ خواهد شد. در واقع، مثلث AKC، قائم‌الزاویه‌است، زیرا زاویهٔ AKC، زاویه‌ای محاطی‌و روبه‌روی نیم‌دایره است؛ و درهرمثلث قائم‌الزاویه، طول ارتفاع وارد بر وتر، واسطهٔ هندسی است بین دوقطعه‌ای‌که روی وتر جدا می‌کند (طول‌های این دوقطعه، به‌ترتیب، برابر $۱+\sqrt{۲}$ و ۱ است).



شکل ۱۸

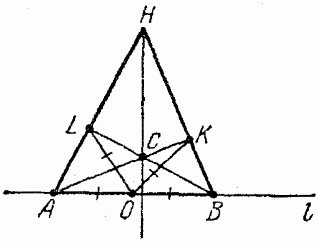
∇ دراین مسأله نشان دادیم که، چگونه می‌توان با در دست داشتن پاره‌خطهای‌راست a وb، پاره خطهای‌راست $\sqrt{a^۲+b^۲}$ و $\sqrt{ab}$راساخت. با استفاده ازقضیهٔ مربوط به‌خطهای راست موازی (وقتی‌که ضلعهای زاویه را قطع‌کرده باشند)، می‌توان با در دست داشتن پاره خطهای راست a و bو c، پاره خط راست $\frac{ab}{c}$ را هم ساخت.

با ترکیب این ساختمان‌ها، بسیاری از پاره خطهای راست دیگر هم ساخته می‌شوند. مثلاً پاره خط راست به‌طول $\sqrt{ab+cd}$ را می‌توان به این ترتیب به‌دست‌آورد: ابتدا پاره‌خطهای راست با طول‌های $m=\sqrt{ab}$ و $n=\sqrt{cd}$ را می‌سازیم و، سپس، پاره‌خط راست به‌طول $\sqrt{m^۲+n^۲}$ را به‌دست می‌آوریم.

ثابت می‌شود که: با دردست داشتن پاره خط راست به‌طول واحد، تنها می‌توان پاره‌خطهای راستی‌راساخت‌که، طول‌آن‌ها، به‌کمك‌انجام عمل‌های حسابی و چندبارجذر، قابل محاسبه باشند.

برای علاقه‌مندان. طول‌های همهٔ این‌گونه پاره خطهای راست، یك میدان را تشکیل می‌دهند. مسألهٔ ۷.۳، به‌این مناسبت قابل حل بود که‌عدد $\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$، متعلق به‌این میدان است. غیر قابل حل بودن مسألهٔ مربوط به‌تضعیف مکعب، ازاین‌جاناشی‌می‌شود که‌عدد $\sqrt[۳]{۲}$، به‌این‌میدان‌تعلق‌ندارد.

مسألهٔ ۸.۳. روی خط راست مفروض l، پـاره‌خطهای OA و OB را به‌طول ۱ سانتی‌متر جدا می کنیم، سپس، ازهمین نقطهٔ O، دوپاره‌خط راست دیگر OK و OL را به‌طول ۱ سانتی‌متر رسم می کنیم (دو نقطهٔ K و L در یك‌طرف خط‌راست l قراردارند؛ شکل ۱۹ را ببینید). Cرا نقطهٔ برخوردخطهای راست AK وBL، وHرا نقطهٔ برخوردخطهای‌راست AL وBK می گیریم. دراین صورت، خط راست CH، برخط راست l، عمود خواهد شد.



شکل ۱۹

برای اثبات درستی رسم، باید ازاین دو قضیه استفاده کـرد: ۱) اگر درمثلثی، طول میانـهٔ وارد برقاعده، برابرنصف طول قاعده باشد،آن وقت، زاویـهٔ رأس ایـن مثلث، قائمه است؛ ۲) درهرمثلث، سه‌ارتفاع، دریك نقطه به‌هم می‌رسند.

∇ درمسألهٔ ۸.۳، صحبت برسر ساختمانـی است کـه بـاید بـا انتخاب ابزاری غیرعادی، یك خط‌کش و واحد طول، انجام گیرد. می‌توان ثابت کرد که، به‌کمك‌این ابزار، بسیاری ازمسأله‌های عادی ساختمانی، قابل حل‌اند: رسم خط راستی موازی یا عمود برخط راست مفروض به نحوی که از نقطهٔ مفروضی بگذرد، جداکردن پاره‌خط راست‌مفروض‌روی خط راست مفروض، جداکردن زاویهٔ مفروض درهرطرف نیم خط راست مفروض.

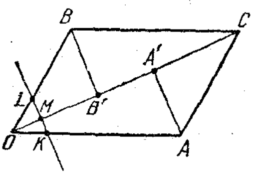
با وجود این، به‌کمك خط‌کش و واحد طول، نمی‌توان هرمسأله‌ای را که‌با پرگاروخط‌کش حل می‌شود، حل کرد. مثلاً، با در دست داشتن پاره‌خط راست به‌طول‌واحد، نمی‌توان پاره‌خط‌راست به‌طول$\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$رارسم کرد(با مسألهٔ ۷.۳مقایسه کنید)؛ حتی درحالت کلی، نمی‌توان مثلث‌قائم‌الزاویه‌ای را ساخت که طول وتر وضلع مجاوربه زاویهٔ قائمهٔ‌آن معلوم باشد.

معلوم شده است که، با آغاز از پاره خط راست بـه‌طول واحد، تنها می‌توان پاره خطهای راستی را ساخت که طول‌آن‌ها، با عمل‌های حسابی

و همچنین جذرگرفتن ازمجموع مجذورهای طول‌های پاره خط‌های مفروض، قابل بیان باشد (به‌زبان دیگر، بیان طول این پاره‌خط راست، باید به‌ازای همهٔ تغییرعلامت‌های ممکن درجلو همهٔ رادیکال‌ها، مقداری حقیقی باشد).

مسألهٔ ۰۹۰۳. پاسخ: $\frac{۱}{۷}$.

نقطه‌های برخورد خط راست رسم شده را، با ضلع‌های OA، OB و با قطر OC، به ترتیب K، L و M مـی‌گیریم (شکل ۲۰). ساختمان‌های زیر را انجام مـی‌دهیم که به ما امکان می‌دهند، همهٔ نسبت‌های لازم را بـه صورت نسبت پاره خط راست روی‌قطر OC درنظر بگیریم.



شکل ۲۰

پـاره خطهـای راست BB' و AA' را موازی خط راست مفروض، رسم مـی‌کنیـم؛ درضـمن B' و A'، نقطه‌هایی از قـطر OC هستند. مثلث‌های OBB' و CAA' برابرند (این دو مثلث، نسبت به‌مرکزمتوازی‌الاضلاع، متقارن‌اند)، بنابراین $OB'=CA'$. ازبرابری‌های

$$۳=OB:OL=OB':OM،$$

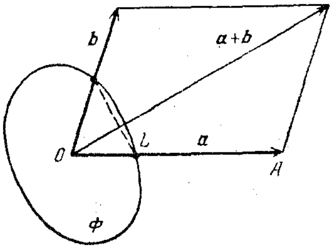
$$۴=OA:OK=OA':OM،$$

$$OC=OB'+OA'$$

به‌دست می‌آید:

$$OC:OM=۳+۴=۷$$

▽ به‌همین ترتیب مـی‌توان ثابت‌کرد که، اگر خط راستی از دو ضلع مجاوریك متوازی‌الاضلاع، به‌ترتیب، $\frac{۱}{\lambda}$ و $\frac{۱}{\mu}$ آن‌ها را جـدا کند، آن وقت $\frac{۱}{\lambda+\mu}$ قطرآن را جدا خواهدکرد.



شکل ۲۱

با تکیه براین حقیقت، می‌توان نابرابری معروف و مهم مربوط به نُرم بردارها را ثابت کرد. این نابرابری را می‌توان این طور توضیح داد (شکل ۲۱). Φ را مجموعهٔ بستهٔ محدودی با مرکزتقارن O فرض می‌کنیم. برای هربردار $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$، نماد $\|\mathbf{a}\|$ رابرابر با نسبت $\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OL}|}$ می‌گیریم که، درآن، L، عبارت است از نقطهٔ برخورد نیم خط راست OA با محیط شکل Φ. در این صورت، اگر Φ محدب باشد، «نابرابری مثلثی» زیر برقراراست:

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|\leqslant\|\mathbf{a}\|+\|\mathbf{b}\|$$

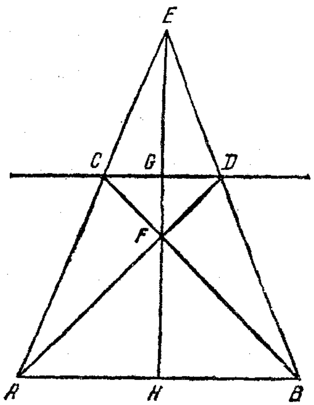
درحالت خاص، اگرΦ، دایره‌ای به‌شعاع‌واحد وبه‌مرکز O، درصفحهٔ Oxy باشد، آن وقت «نرم بردار» همان طول عادی می‌شود و «نابرابری مثلثی» برای بردارهای $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ به‌این صورت درمی‌آید:

$$\sqrt{(x_۱+x_۲)^۲+(y_۱+y_۲)^۲}\leqslant\sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲}+\sqrt{x_۲^۲+y_۲^۲}$$

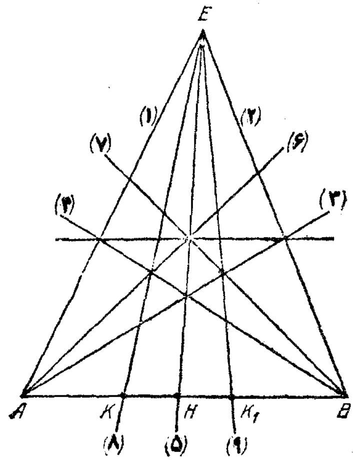
مسألهٔ ۱۰.۳. کافی است (بدون درنظر گرفتن دوخط راست مفروض)، ۹ خط راست رسم کنیم (روی شکل ۲۲، خطهای راست را، به‌ترتیب رسم آن‌ها، شماره گذاری کرده‌ایم). ثابت می‌کنیم، روی این شکل

$$AH=BH=\frac{۱}{۲}AB$$

پاره‌خط راست CD را می‌توان از AB با تجانس به‌مرکز E و به‌مرکز F به‌دست‌آورد؛ درهریك ازاین تجانس‌ها، نقطهٔ H به‌نقطهٔ G تبدیل می‌شود (شکل ۲۳ را ببینید). بنابراین



شکل ۲۳



شکل ۲۲

$$\frac{CG}{AH}=\frac{EC}{EA}=\frac{CD}{AB}=\frac{FC}{FB}=\frac{CG}{BH}$$

ازآن جا $AH=BH$.

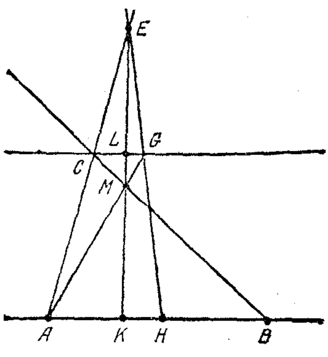
پاره خط راست CG را می‌توان از پاره خط راست AH درتجانس به مرکز E و یا ازپاره خط راست AB در تجانس به مرکز M به دست آورد (شکل ۲۴).

درهریك ازاین دوتجانس، نقطهٔ L به نقطهٔ K تبدیل می‌شود.

چون $AB=۲AH$، پس

$$\frac{CL}{AK}=\frac{EC}{EA}=\frac{CG}{AH}=\frac{۲CG}{AB}=$$

$$=\frac{۲CM}{MB}=\frac{۲CL}{BK}$$

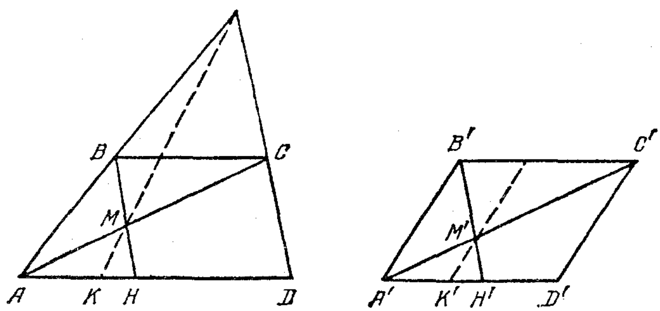


شکل ۲۴

از آن جا $2AK=BK$، یعنی $AK=\frac{1}{3}AB$. به‌همین ترتیب، ثابت‌می‌شود

که، روی شکل ۲۲، $BK_1=\frac{1}{3}AB$، یعنی $AK=KK_1=K_1B$.

∇ با ادامهٔ عمل‌هایی از این‌گونه (رسم خط راست AL و، سپس، از نقطهٔ N محل برخورد آن با CB، رسم خط راست EN که AB و CD را قطع می‌کند وغیره) می‌توان $\frac{1}{4}$ پاره خط راست AB، سپس $\frac{1}{5}$ آن و، به‌طور کلی، $\frac{1}{n}$ آن را جداکرد ($n\in\mathbf{N}$).



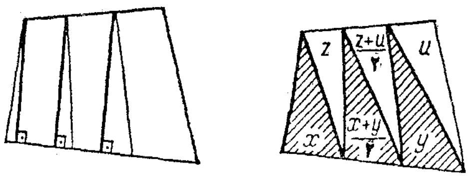
ب) الف)

شکل ۲۵

بین این مسأله که در آن، صحبت برسر نسبت پاره خط‌های راست در ذوزنقه است، بامسألهٔ قبل که درآن، نسبت پاره خط‌های راست درمتوازی‌الاضلاع مورد بررسی قرار گرفت، خویشاوندی نزدیکی وجود دارد (شکل «۲۵ـ الف»را ببینید). خط راستی که از رأس B' ازمتوازی‌الاضلاع $A'B'C'D'$ به‌نقطهٔ H'، وسط ضلع $A'D'$ وصل شود، ازقطر $A'C'$، یك سوم آن را جدا می‌کند: $A'M'=\frac{1}{3}A'C'$. خط راستی هم که از نقطهٔ M' موازی

$A'B'$ رسم شود، ازضلع‌های $B'C'$ و $A'D'$، یك سوم آن‌ها را جدامی‌کند. همان طـور که مـی‌بینیم، شکل‌هـای «۲۵ـ الف» و «۲۵ـ ب» خیلی شبیه یکدیگرند. دربحث مربوط به‌مسألهٔ ۲۰.۳، دلیل این شباهت را موردبررسی قرارخواهیم داد.

مسألهٔ ۱۱.۳. برای حل‌مسأله، شکل را با ساختمانی، کامل می‌کنیم: درهمهٔ چهارضلعی‌های حاصل، قطرها را، شبیه آن چه در شکل «۲۶ـالف» می‌بینید، رسم‌می‌کنیم. مساحت‌دومثلث‌هاشورخوردهٔ دوطرف را، به‌ترتیب، x و y می‌گیریم (شکل «۲۶ـ الف»). دراین صورت، مساحت مثلث میانی، برابر $\frac{۱}{۲}(x+y)$ می‌شود. در واقع، طول قـاعده‌های ایـن سه مثلث یکی است وطول ارتفاع مثلث میانـی، بـرابـر است با نصف مجموع دو ارتفاع مثلث‌های دوطرف (اگر ارتفاع‌های سـه مثلث را رسم کنیم، ارتفاع مثلث میانی، وسط دو ساق ذوزنقه‌ای را به‌هم وصل‌کرده است که دوقاعدهٔ آن، دو ارتفاع مثلث‌های کناری هستند؛ شکل «۲۶ـ ب»).



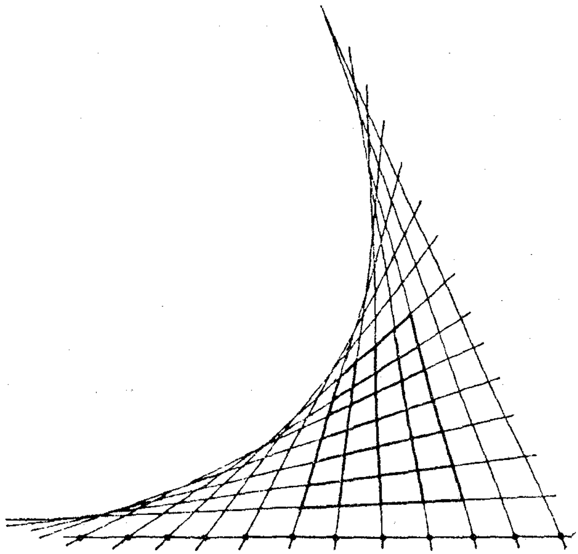
ب)　　　　　الف)

شکل ۲۶

همین‌استدلال را درمورد سه مثلثی هم‌که هاشورنخورده‌اند، می‌توان بیان‌کرد. به‌این‌ترتیب، مساحت‌تمامی چهارضلعی برابر $\frac{۳}{۲}(x+y+z+u)$ و مساحـت چهارضـلعی بین خط‌های راست، بـرابـر $\frac{۱}{۲}(x+y+z+u)$

می‌شود ، یعنی $\frac{1}{3}$ مساحت چهارضلعی اصلی.

▽ این قضیه، درحالت کلی‌ترخود هم درست است: اگرچند خط‌راست، دو ضلع روبه‌روی یك‌چهارضلعی رابه‌بخش‌های برابرتقسیم‌کنند، مساحت‌های چهارضلعی‌های حاصل، تشکیل یك تصاعد حسابی می‌دهند.



شکل ۲۷

اگردوضلع دیگر روبه‌رو را هم، درچهارضلعی مفروض، به بخش‌های برابرتقسیم و نقطه‌های تقسیم متناظر را بـه‌هم وصل‌کنیم، به‌نحوی که در درون چهارضلعی، شبکه‌ای از خـانه‌های کـوچك به‌دست آیـد (شکل ۲۷ را ببینید)، آن وقـت هرپاره خـط راستی کـه، دوانتهای آن، روی دوضلع روبه‌روی‌چهارضلعی‌باشد، به‌بخش‌های برابرتقسیم می‌شود و، ازاین گذشته، مساحت‌های خانه‌هایی‌که دریك ردیف قـرار گرفته‌اند، تشکیل یـك تصاعد

حسابی می‌دهند.

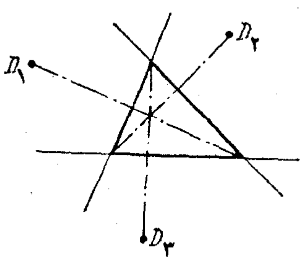
جالب است که، همهٔ خطهای راستی که به این ترتیب رسم شده‌اند، بریك سهمی مماس‌اند (شکل ۲۷).

اگر فرض کنیم که، چهارضلعی اصلی، ازمیله‌های نازکی درست شده باشد که بتوان آن‌ها راخم کرد وچهارضلعی را به‌صورت یك‌چهارضلعی‌فضایی با ضلع‌های منحنی درآورد، آن وقت خطهای راست متقاطع قبلی، روی‌یك سطح زینی‌شکل‌قرار می گیرندکه، این خطهای راست، «بافت» آن‌راتشکیل می دهند.

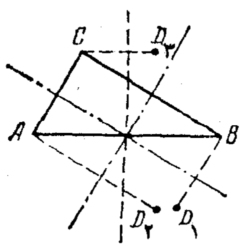
مسألهٔ ۱۲۰۳. پاسخ: اگرمثلث قائم‌الزاویه نباشد، به‌۶ طریق؛ واگر قائم‌الزاویه باشد، به ۵ طریق.

فرض کنید،مجموعهٔ نقطه‌های $\{A، B، C، D\}$ دارای محورتقارن باشد. دربیرون محور تقارن، باید تعداد زوجی ازنقطه‌ها واقع باشند، در غیر این صورت، نمی‌توان آن‌ها را، دوبه‌دو قرینهٔ هم قرارداد. ازآن جا که هرچهار نقطهٔ A، B، C و D را نمی‌توان روی محورتقارن درنظر گرفت (سه‌نقطهٔ A، B و C، روی یك خط راست نیستند)، بنابراین باید دوحالت را مورد مطالعه قرارداد.

۱) روی محورتقارن، هیچ‌کدام از نقطه‌های ما واقع نیستند. دراین صورت، محورتقارن، عمود منصف یکی ازضلع‌های مثلث ABC و نقطهٔ D



شکل ۲۹



شکل ۲۸

قرینهٔ رأس سوم نسبت به‌این‌محور است. به‌این ترتیب، دراین‌حالت، برای D سه موضع به دست می‌آید: D_1، D_2وD_3 روی شکل ۲۸. وقتی زاویهٔ C برابر ۹۰ درجه باشد، با رسم عمود منصف‌های AC و BC، تنها یك نقطه برای D به‌دست می‌آید: $D_1 = D_2$، زیرا این دو عمود منصف، محورهای تقارن مستطیل $ABCD$ می‌شوند.

۲) دوتا ازنقطه‌ها روی محورتقارن‌اند. دراین حالت، محور تقارن، از دونقطه ازبین سه نقطهٔ A ، B و C می‌گذرد و نقطهٔ D قرینهٔ نقطهٔ‌سوم نسبت به‌محورتقارن می‌شود. به‌این‌ترتیب، سه‌موضع دیگربرای D به‌دست می‌آید (شکل ۲۹).

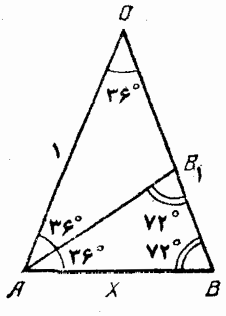
این شش موضع برای D، جز درحالتی‌که درمورد مثلث قائم‌الزاویه گفتیم، برای مثلث غیرمتساوی‌الساقین درهیچ‌حالتی برهم منطبق نمی‌شوند.

مسألهٔ ۱۳.۳. دایرهٔ به قطر AM را رسم می‌کنیم (شکل ۳۰). چون دو زاویهٔ APM و AQM قائمه‌اند، نقطه‌های P و Q بر محیط این دایره واقع‌اند و ازآن جا

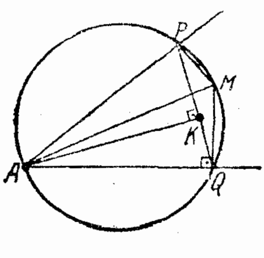
$$\widehat{MAQ} = \widehat{QPM}$$

(زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یك کمان دایره). همچنین، توجه می‌کنیم که

$$\widehat{PAK} = \widehat{QPM}$$



شکل ۳۱



شکل ۳۰

در واقع $\widehat{PAK}=90^\circ-\widehat{APK}$ (AK بر PQ عمود است) و همچنین $\widehat{QPM}=90^\circ-\widehat{APK}$ (MP بر AP عمود است). بنابراین

$$\widehat{MAQ}=\widehat{PAK}$$

چیزی که اثبات آن را لازم داشتیم.

∇ د. هیلبرت، بارها از این مسأله در کتاب مشهور خود به نام «پایه‌های هندسه» استفاده کرده است. او به‌خصوص علاقه‌مند به روشن کردن این مسأله بوده است که، کدام مسأله‌های ساختمانی را می‌توان تنها به کمك خط کش و واحد طول حل کرد (بحث مربوط به مسألهٔ ۸.۳ را ببینید).

مسألهٔ ۱۴.۳. طول ضلع ده ضلعی منتظم را برحسب شعاع دایرهٔ محیطی آن، محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، مثلث متساوی‌الساقین AOB را درنظرمی گیریم که، در آن، O مرکز ده ضلعی منتظم و AB یکی از ضلع‌های آن است (شکل ۳۱). دراین صورت داریم:

$$\widehat{AOB}=36^\circ\ ,\ \widehat{OAB}=72^\circ$$

AB_1، نیمساز زاویهٔ OAB را رسم می‌کنیم. چون مثلث‌های OB_1A و B_1AB متساوی‌الساقین‌اند، بنابراین

$$AB=AB_1=OB_1$$

$OA=1$ و $AB=x$ می‌گیریم. ازتشابه مثلث‌های AOB و B_1AB به‌دست می‌آید: $\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$.

جواب مثبت این معادلهٔ درجه‌دوم $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ است. پاره خط راستی با این طول را می‌توانیم، به کمك پرگار و خط کش رسم کنیم (حل مسألهٔ ۷.۳ را ببینید). بنابراین، برای رسم ده‌ضلعی منتظم، کافی است دایره‌ای به‌شعاع واحد رسم کنیم و، با آغاز از نقطه‌ای واقع برمحیط آن، به کمك پرگاری که

به اندازهٔ $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ بازشده است، پشت سرهم رأس‌های ده ضلعی منتظم را روی محیط دایره علامت بگذاریم.

∇ دربسیاری از مسأله‌ها، با عدد $x=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ بـرخورد می‌کنیم. به‌عنوان مثال $\sin ۱۸^\circ=\frac{x}{۲}=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$.

عدد $\tau=\frac{۱}{x}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ را از زمان‌هـای قـدیم می‌شناخته‌اند و به «تقسیم طلائی» مربوط بوده است: اگر پاره خط راستی را به نسبت τ تقسیم کنیم، آن وقت، نسبت طول تمام پاره خط به‌بخش بزرگترآن، برابربا نسبت بخش بزرگتر به بخش کـوچکتر می‌شود. همین عـدد، در رابطه با عـددهای فیبوناچـی هم به دست می‌آید (مسأله‌های ۱۱.۶، ۱۶.۶ و ۱۷.۶ را ببینید).

برای علاقه‌مندان. امکان رسم n ضلعی منتظم بستگی به‌این دارد که، آیا عدد $\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ به‌میدانی ازعددها که دربحث مسألهٔ ۷.۳ شرح دادیم، تعلق دارد یا نه. کارل فردریك گوس ثابت کرد، تنها وقتی می‌توان n ضلعی منتظم را رسم‌کردکه داشته باشیم:

$$n=۲^k.n_۱.n_۲...n_m$$

که درآن، عددهای n_i ، عددهای اول مختلفی به‌صورت $۲^{۲^l}+۱$ هستند.

شرط بالا برای عدد n، بـا شرط زیرهم‌ارز است: مقدار تـابع $\varphi(n)$ اویلر (بحث مسألهٔ ۸.۲ را ببینید)، برابر توانی از ۲ می‌باشد. در مسألهٔ ۱۴.۳، داریم $n=۱۰$ و $\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$ ومقدار $\varphi(۱۰)$ ـ تعداد عددهای کوچکتراز ۱۰ که نسبت به ۱۰ اول‌اند ـ برابراست با $۲^۲=۴$.

شرط $\varphi(n)=۲^k$ را، بـه‌تقریب، می‌توان این طور روشن کرد. ضمن

ساختمان هندسی به‌کمك پرگار و خط‌کش، هربار کـه نقطه‌های برخورد دو دایره یا یك دایره با خط راست را پیدا می‌کنیم، تعداد نقطه‌های حاصل دو برابرمی‌شود. به‌این مناسبت، سرآخر، 2^l جواب به‌دست مـی‌آید. اکنون، فرض می‌کنیم، روشی‌کلی بـرای رسم یك n ضلعی منتظم پیداکرده باشیم. آن وقت، طبق ایـن روش‌کلی، نه‌تنها این n ضلعی را، بلکه درضمن هرخط شکستهٔ n ضلعی منتظم و بسته («چند ضلعی‌های منتظم ستاره‌ای»؛ مسألـهٔ ۸.۲ را ببینید) را هم می‌توانیم رسم‌کنیم. تعداد این‌هابرابر $\frac{1}{2}\varphi(n)$ است. بنابراین، $\varphi(n)$ باید توانی از ۲ باشد.

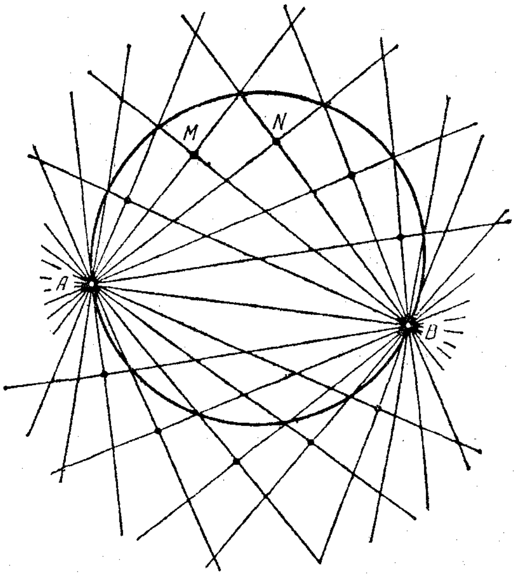
لازم وکافی بودن این شرط را، به طریق جبری ثابت می‌کنند.

مسألهٔ ۱۵.۳. الف) هردوخطراست مجاوری که ازنقطهٔ A گذشته‌اند، زاویه‌ای محاط در دایـره و روبـه‌روی به‌کمان ۳۰ درجه تشکیل می‌دهند (شکل ۳۲)؛ یعنی هرکدام ازاین زاویه‌ها برابر ۱۵ درجه است وهمین، حکم را ثابت می‌کند.

ب) نقطهٔ M، محل برخورد یکی ازخط‌های راست دستهٔ اول با یکی ازخط‌های راست دستهٔ دوم را درنظرمی‌گیریم. ازاین نقطه و نقطه‌های A و B، دایره‌ای مـی‌گذرانیم (درشکل ۳۲، محیط ایـن دایره را با نقطه‌های سیاه مشخص‌کرده‌ایم). اکنون به‌نقطهٔ N توجه‌می‌کنیم که‌ازبرخورد خطهای راست مجاور خطهای راست قبلی (ومثلاً درجهت حرکت عقربه‌های‌ساعت) به‌دست‌آمده است. دو زاویهٔ AMB و ANB با هم برابرند، زیرا مجموع زاویه‌هـای A و B در دو مثلث AMB و ANB برابرند (زاویـهٔ MAB به‌اندازهٔ ۱۵ درجه از زاویهٔ NAB بزرگتراست، درحالی‌که زاویهٔ NBA به‌اندازهٔ ۱۵ درجه از MBA بیشتراست).

چون زاویه‌های AMB و ANB با هم برابرند، بنابراین، نقطه‌های A، M، N و B روی محیط یك دایره‌اند.

∇ حکمی راکه درمسألهٔ ۱۵.۳، الف) ثابت‌کردیم، می‌توان به‌خوبی با زبان «حرکت» روشن‌کرد. اگر خط راستی، بـه‌طور یکنواخت با سرعت



شکل ۳۲

زاویه‌ای ω دورنقطهٔ A (نقطهٔ برخوردآن با دایره) دوران کند، آن‌وقت، نقطهٔ دیگر برخوردآن با دایره (با توجه به قضیهٔ مربوط به‌زاویهٔ محاطی)، با سرعت زاویه‌ای 2ω، روی محیط دایره حرکت می‌کند.

اگردوخط راست متقاطع l_A و l_B، باسرعت زاویه‌ای ω، دور دونقطهٔ A و B خود، درصفحه دوران کنند، آن وقت، مسیر نقطهٔ برخورد این دو خط راست، محیط یك دایره است.

C را نقطهٔ برخورد این دوخط راست در لحظه‌ای از زمان می‌گیریم و دایرهٔ γ راکه ازسه نقطهٔ A، B و C می‌گذرد، رسم می‌کنیم. ازیك طرف، نقطهٔ برخورد خط راست l_A با محیط دایرهٔ γ، به‌طوریکنواخت و با سرعت زاویه‌ای 2ω روی محیط دایرهٔ γ حرکت می‌کند؛ و از طرف دیگر، نقطهٔ

برخورد l_B با محیط همین دایره، با همان سرعت زاویه‌ای 2ω، روی محیط دایرهٔ γ حرکت می‌کند. ولی چون، در یك لحظهٔ زمانی، نقطه‌های برخورد خطهای راست l_A و l_B با دایرهٔ γ، برهم‌منطبق می‌شوند، بنابراین، درهمهٔ لحظه‌های زمانی دیگـر دوران خطهای راست، نقطهٔ برخورد آن‌هـا، روی همین دایره خواهد بود.

برای علاقه‌مندان. ۲۳ خط راستی که رسم کرده‌ایم، تشکیل یك شبکه می‌دهند. اگرخانه‌های این‌شبکه‌را شبیه خانه‌های‌صفحهٔ شطرنج رنگ‌آمیزی کنیم، آن وقت، خانـواده‌ای از دایره‌ها را می‌بینیم که از نقطه‌های A و B گذشته‌اند و، همچنین، خانواده‌ای از هذلولی‌ها (اگر در هر نقطهٔ A و B، به جـای ۱۲، دسته‌ای شامـل ۲۴ خط راست رسم‌کنیم، طـرح شکل بهتر خواهد شد).

این هذلولی‌ها، با توجه به‌موقعیت زیربه‌دست می‌آیند. اگر خطهای راست l_A و l_B، دورنقطه‌های خـود A و B، یکی با سرعت زاویه‌ای ω و دیگری با سرعت‌زاویه‌ای $-\omega$ (یعنی درخلاف جهت یکدیگر) دوران کنند، آن‌وقت نقطهٔ برخوردآن‌ها، روی یك هذلولی حرکت خواهدکرد.

در واقع، لحظه‌ای فرامی‌رسدکه، دوخطراست l_A و l_B، با هم موازی می‌شوند. دستگاه محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم‌که، مبداء آن در نقطهٔ وسط پاره خط راست AB و محور Ox آن موازی با l_A و l_B باشد.

مختصات نقطهٔ A را (a, b) می‌گیریم، دراین صورت، مختصات‌نقطهٔ B برابر $(-a, -b)$ می‌شود. معادله‌های خطهای راست‌را، درلحظهٔ‌زمانی t، می‌توان این‌طورنوشت:

$$x \sin \omega t - y \cos \omega t = a \sin \omega t - b \cos \omega t,$$

$$x \sin \omega t + y \cos \omega t = -a \sin \omega t - b \cos \omega t$$

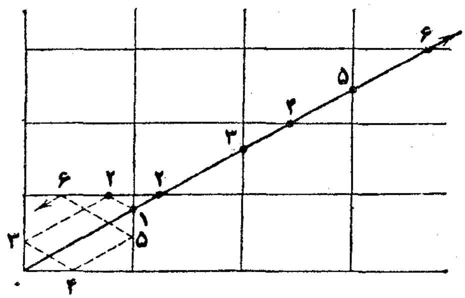
ومختصات نقطهٔ برخوردآن‌ها، چنین می‌شود:

$$x = -b \operatorname{cotg} \omega t$$

$$y = -a \operatorname{tg} \omega t$$

بنابراین $xy = ab$، یعنی نقطهٔ برخورد خطهای راست، روی یك هذلولی قراردارد.

مسألهٔ ۱۶.۳. به‌جای تـوپ بیلیارد، خـود مستطیل (میز بیلیارد) را منعکس می‌کنیم. بعد ازهمـهٔ انعکاس‌های ممکن مستطیل، نسبت به ضلع‌ها (بهتراست، همهٔ این‌ها رادریك‌صفحهٔ کاغذ شطرنجی‌انجام دهیم)، به‌شبکه‌ای ازخطهای راست می‌رسیم کـه صفحه را به‌مستطیل‌های $m \times n$ تقسیم کرده است. برای‌این‌که مسیرتوپ بیلیارد راروی میزبسازیم، می‌توان خط راستی رسم کرد که از مبداءِ O بگذرد وبا یکی از ضلع‌ها، زاویه‌ای برابر ۳۰ درجه بسازد. باید ببینیم، این خط‌راست، چگونه بااین مستطیل‌ها برخورد می‌کند و، سپس آن‌ها را روی هم قراردهیم، تا مسیرتوپ بیلیارد روی مستطیل اصلی میزپیدا شود (شکل ۳۳).



شکل ۳۳

اکنون ثابت می‌کنیم، خط راستی‌کـه ازگرهٔ O شبکه، با زاویهٔ ۳۰ درجه نسبت به‌دیوارهٔ میزبیلیارد گذشته است، ازهیچ گرهٔ دیگری نمی‌گذرد. ازاین جا، درستی حکم مسأله ثابت می‌شود.

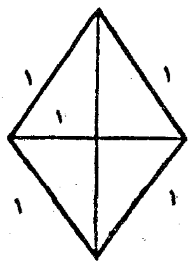
اگرتوپ‌بیلیارد از گرهٔ‌دیگری عبورکند،آن وقت مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویهٔ ۳۰ درجه به‌دست می‌آیدکـه، ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن،

عددهایی درست‌اند. ولی عدد $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (که عددی گنگ است)، نمی‌تواند برابر با نسبت دوعدد درست باشد.

برای علاقه‌مندان. مسیرتوپ بیلیارد درمسألهٔ ۱۶.۳، همهٔ سطح میز را، به‌صورتی متراکم، «می‌پوشاند»، اگرچه همیشه، با یکی ازضلع‌های‌میز، زاویه‌ای‌برابر ۳۰ درجه می‌سازد. اگرمیزبیلیارد به‌شکل دایره یابیضی‌باشد، آن وقت، مسیرتوپ همه جا متراکم نیست و حوزه‌ای را تشکیل می‌دهدکه توپ ازآن جا می‌گذرد. به‌طور کلی، رفتار مسیرتوپ روی میز بیلیارد، در صفحه یا در فضای چند بعدی، ارتباط نزدیکی با شکل میزبیلیارد دارد. برای میزهایی که همهٔ کناره‌های‌آن‌ها، تحدبی به‌درون داشته باشد: مسیر توپ همه‌جا متراکم است‌وازهمسایگی هرنقطهٔ‌دلخواه میزمی‌گذرد، درضمن، در جهت‌های مختلف. در این حالت، مسأله، به مدل ریاضی گازی که «اتم‌های»آن به‌هم برخورد می‌کنند، منجرمی‌شود. برای میزهای محدب و، به‌خصوص، وقتی‌که دیواره‌های مستقیم دارند، معمولاً، این ویژگی وجود ندارد وشرح مسیرتوپ، دراین حالت، تنها دربرخی موردهای خاص ممکن است.

مسألهٔ ۱۷.۳. پاسخ: الف) ممکن است. نمونهٔ آن درشکل ۳۴ داده شده است.

ب) ممکن نیست.



شکل ۳۵

شکل ۳۴

سه نقطه را درنظرمی گیریم که، همهٔ فاصله‌های دوبه‌دوی آن‌ها، برابر ۱ سانتی‌متر باشند. این سه نقطه، مثلث متساوی‌الاضلاعی را به ضلع ۱ سانتی‌مترتشکیل می‌دهند. فاصلهٔ نقطهٔ چهارم، با دو نقطه ازاین سه‌نقطه، برابر ۱ سانتی‌متراست، بنابراین، نقطهٔ چهارم هم، با این دو نقطه، یك مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازد. به‌این ترتیب، چهار نقطه، یك لوزی به ضلع ۱ سانتی‌متربه‌وجود می‌آورند(شکل ۳۵). ولی‌دراین‌صورت، ششمین فاصله، طولی برابر قطر بزرگتر این لوزی، یعنی $\sqrt{3}$ سانتی‌متر خواهد داشت و $1/8 \neq \sqrt{3}$.

∇ این مسأله را به‌صورت زیرتعمیم‌می‌دهیم.

به‌ازای‌چه‌مقدارهایی‌ازα، چهارنقطه: الف) درصفحه، ب) درفضاوجود دارند، به‌نحوی که فاصلهٔ بین دوبه‌دوی آن‌ها، برابر ۱، ۱، ۱، ۱، ۱ و α باشد؟

ازحل‌مسألهٔ ۱۷.۳ روشن‌است که پاسخ به‌شش الف) چنین است: تنها به ازای $\alpha = \sqrt{3}$. از همین حل، پاسخ به شش ب) هم به دست می‌آید: به‌ازای $\sqrt{3} \geqslant \alpha > 0$. در واقع، اگرلوزی را، در فضا، روی قطرکوچکتر آن خم کنیم، قانع می‌شویم که فاصلهٔ بین دو رأس مقابل آن، می‌تواند از $\sqrt{3}$ تا ۰ تغییر کند.

برای علاقه‌مندان. به‌مشاهدهٔ‌دیگری می‌پردازیم: به‌ازای $2 \geqslant \alpha > \sqrt{3}$ برای هرسه‌نقطه‌ازچهارنقطه، نابرابری مثلثی برقراراست (طول ضلع بزرگتر ازمجموع طول‌های دوضلع دیگر تجاوزنمی کند)؛ با وجود این، درفضا (و حتی درفضای n بعدی اقلیدسی)، نمی‌توان چهارنقطه پیداکردکه فاصله‌های دوبه‌دوی آن‌ها، این گونه باشند.

می‌توان پرسش کلی‌تری را مطرح کرد: آیا می‌توان: الف) در صفحه، ب) درفضا، چهارنقطهٔ ۱، ۲، ۳ و ۴ را طوری قرارداد که فاصله‌های دوبه‌دوی آن‌ها، به‌ترتیب، برابر عددهای مفروض r_{12}، r_{13}، r_{14}، r_{23}، r_{24} و r_{34} باشد (r_{ij}، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ زوج ij است)؟ بی‌تردید همهٔ عددهای r_{ij} باید غیرمنفی باشند و درنابرابری مثلثی $r_{ij} + r_{jk} \geqslant r_{ik}$ صدق کنند ولی این، کافی نیست. برای پیداکردن پاسخی قانع کننده به ب)، لازم و کافی‌است

که، درضمن، دترمینان زیر، غیرمنفی باشد:

$$\Delta_۴ = \begin{vmatrix} ۰ & r_{۱۲}^۲ & r_{۱۳}^۲ & r_{۱۴}^۲ & ۱ \\ r_{۱۲}^۲ & ۰ & r_{۲۳}^۲ & r_{۲۴}^۲ & ۱ \\ r_{۱۳}^۲ & r_{۲۳}^۲ & ۰ & r_{۳۴}^۲ & ۱ \\ r_{۱۴}^۲ & r_{۲۴}^۲ & r_{۳۴}^۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}$$

و برای این‌که بتوانیم، چهارنقطه را، برصفحه قراردهیم، (پرسش «الف»)، باید دترمینان $\Delta_۴$ برابرصفرباشد.

اگرچهارنقطهٔ ۱، ۲، ۳ و ۴، درفضا مستقرشده باشند، آن‌وقت

$$\Delta_۴ = ۲^۳(۳!)^۲V^۲ = ۲۸۸V^۲$$

که درآن، V، حجم چهاروجهی با رأس‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ است. ازاین جا روشن می‌شودکه شرط $\Delta_۴ \geqslant ۰$، برای امکان استقرار نقطه‌ها درفضا، لازم است.

ببینیم، چرا شرطهای $r_{ij} \geqslant ۰$، $r_{ij}+r_{jk} \geqslant r_{ik}$ و $\Delta_۴ \geqslant ۰$ برای‌این منظورکافی هستند. اگرهمهٔ فاصله‌ها را، به‌جز $r_{۳۴}$ ثابت فرض‌کنیم، آن‌وقت، مثلث‌های ۱۲۳ و ۱۲۴ را می‌توان دورضلع مشترکشان، یال ۱۲، دوران داد (زاویهٔ دو وجهی φ، بین‌آن‌ها، از۰ درجه تا ۱۸۰ درجه تغییرمی‌کند). دراین صورت، $\Delta_۴$، به‌عنوان تابعی از$x=r_{۳۴}^۲$، به صورت یك سه‌جمله‌ای درجه دوم، باضریب منفی برای $x^۲$، درمی‌آید. ریشه‌های این سه‌جمله‌ای، متناظربا مقدارهایی از x هستند که، به‌ازای‌آن‌ها، مثلث‌ها برصفحه قرار می‌گیرند ($\varphi=۰°$ و $\varphi=۱۸۰°$). وقتی φ از۰ تا ۱۸۰ درجه تغییرکند، x همهٔ مقدارهای بین دو ریشه را قبول می‌کند، یعنی همهٔ مقدارهایی که، به‌ازای‌آن‌ها، داریم: $\Delta_۴(x) \geqslant ۰$.

یادآوری می‌کنیم که، با این روش و به کمك دترمینان، می‌توان دستور هرون را، برای S، مساحت مثلث با ضلع‌های $r_{۱۲}$، $r_{۱۳}$ و $r_{۲۳}$

نوشت:

$$S^2=\frac{\Delta_3}{2^2(2!)^2}=\frac{1}{16}\Delta_3$$

که درآن داریم:

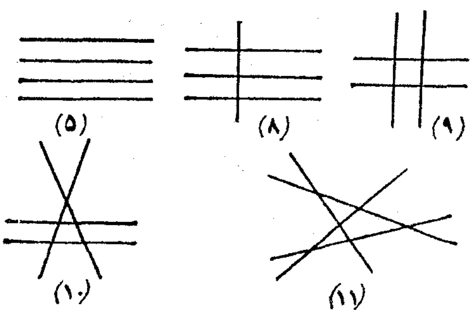
$$\Delta_3=-\begin{vmatrix} 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & 1 \\ r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & 1 \\ r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=2r_{13}^2r_{23}^2+2r_{12}^2r_{23}^2+2r_{12}^2r_{13}^2-r_{12}^4-r_{13}^4-r_{23}^4$$

مسألهٔ ۱۸۰۳. پاسخ: ۵، ۸، ۹، ۱۰ یا ۱۱.

روی شکل ۳۶ نمونه‌های تقسیم صفحه، به ۵، ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱ بخش نشان داده شده است. ثابت می‌کنیم، حالت دیگری وجود ندارد.

اگرهمهٔ خطهای راست با هم موازی باشند، تعداد بخش‌ها برابرپنج است. اکنون فرض می‌کنیم، همهٔ خطهای راست موازی نباشند. دو خط راست متقاطع را درنظرمی‌گیریم؛آن‌ها صفحه را به۴ زاویه تقسیم می‌کنند.



شکل ۳۶

هرخط راست تازه‌ای کـه رسم کنیم، دست کم دو بخش از چهار بخش قبلی را قطع و هرکدام ازاین بخش‌ها را، به‌دو بخش تقسیم می کند. بنابراین، هرخط راست بعدی، دست کم دو بخش تـازه، بـه بخش‌های قبلی اضافـه می کند. به‌خصوص، برای چهارخط راست، که بین آن‌ها خطهای راست موازی هم وجود دارد، صفحه را دست کم به $۲ \times ۲ + ۴$، یعنی ۸ بخش تقسیم می کنند.

اکنون ثابت می کنیم، تعداد بخش‌ها، ازیازده تجاوزنمی کند. خطهای راست را، بـه‌نوبت رسم می کنیم. دو خط راست اول، بیش از چهار بخش به‌وجـود نمی‌آورند. خط راست سوم، نمی‌تـواند بیش از دو نقطهٔ مشترك با خطهای راست قبلی داشته باشد و، بنابراین، حداکثرازسه‌بخش می گذرد؛ درنتیجه، تعداد بخش‌ها، نمی‌تواند بیش ازسه‌تا افزایش یابد.

خط راست‌چهارم، حداکثرهرسه خطراست قبلی‌را قطع می کند وازچهار بخش می گذرد؛ بنابراین، بیش‌ازچهاربخش، به‌بخش‌های قبلی اضافه نمی کند.

روی هم، بیش از $۴ + ۳ + ۴$، یعنی ۱۱ بخش به دست نمی‌آید.

∇ این مسأله را مـی‌توان، بـه‌طورطبیعی، تعمیم داد: n خط راست مختلف، صفحه را به‌چند بخش می‌توانند تقسیم کنند؟

اگرشبیه بالا استدلال کنیم، به‌این نتیجه می‌رسیم که تعداد بخش‌های صفحه‌می‌تواند برابر$(n+۱)$ ویا از $۲n$ تا $\frac{۱}{۲}(n^۲+n+۲)$ (وخود این دو عدد) باشد. با وجود این، به‌نظر می‌رسدکه، همیشه نمی‌توان به‌هرتعداد از این بخش‌ها رسید. مثلاً، ۵ خط راست نمی‌توانند صفحه را به $۲ \times ۵ + ۱$، یعنی ۱۱ بخش تقسیم کنند و، بـه‌طورکلی، n خط راست، به‌ازای $n \geqslant ۵$، نمی‌توانند صفحه را به $(۲n+۱)$ بخش تقسیم کنند. بنابراین، پاسخ به‌این پرسش جالب است که: بـه کدام عدد از عددهای از $۲n$ تا $\frac{۱}{۲}(n^۲+n+۲)$ می‌توان دست یافت؟

همچنین، پاسخ به این پرسش هم جالب است که: درحالت کلی (وقتی که هیچ سه‌خط راستی ازیك نقطه نگذرند وهیچ دوخط راستی با هم موازی نباشند)، n خط راست، صفحه را به‌چگونه حوزه‌هایی تقسیم می کنند؟ برای

$n=۴$، وقتی خط‌های راست بـه‌حالت کلی باشند، در شکل ۳۶ نشان داده شده است؛ درآن جا، بین سه حوزهٔ متناهی، یك حوزهٔ چهارضلعی ودوحوزهٔ سه ضلعی وجود دارد، وبین هشت حوزهٔ نامتناهی، سـه زاویه، چهارمثلث «نامتناهی» ویك چهارضلعی «نامتناهی». درحالت $۵\leqslant n$، حالت‌های مختلف دیگری هم پیدا می‌شود.

مسألهٔ مربوط به ارزیابی حداکثر تعداد مثلث‌هـا، درتقسیم صفحه به وسیلهٔ n خط راست، درماهیت خود، بامسألهٔ زیرکه متعلق به و.ای.آرنولد می‌باشد، هم‌ارزاست: فرض کنید، هر $a_n=\frac{۱}{۲}(n^۲+n+۲)$ حوزهٔ‌تقسیم‌را، به‌وسیلهٔ دو رنگ سیاه‌وسفید، طوری رنگ کرده باشیم که، هردوحوزهٔ‌مجاور (که دریك پاره خط یا نیم خط راست مشترك‌اند) به‌دورنگ مختلف باشند؛ درضمن، تعداد حوزه‌های به‌رنگ سیاه را b_n می‌گیریم. حداکثرمقدارنسبت $\frac{b_n}{a_n}$ چقدراست؟

می‌توان (مثلاً با استفاده از قضیـهٔ اویلر؛ مسألهٔ ۱۵.۵ را ببینید) ثابت کردکه $\frac{b_n}{a_n}\leqslant\frac{۲}{۳}$ (به‌ازای هرمقدار n)؛ درضمن، وقتی که‌حداکثرحوزه‌ها به‌رنگ سیاه باشند، همهٔ آن‌ها (یا تقریباً همهٔ‌آن‌ها) باید مثلثی شکل باشند.

چندی پیش، یو.پ.چه‌کانوف، بااستفاده ازویژگی‌های هندسی‌منحنی‌های درجهٔ سوم (بحث مسألهٔ ۲۲.۲ را ببینید)، ثابت کرد، به ازای مقدارهای به‌قدرکافی بزرگ n، می‌توان این نسبت را تـا حد دلخواه، به $\frac{۲}{۳}$ نزدیـك کرد. ارزیابی دقیق حداکثرتعداد حوزه‌های سیاه رنگ ومثلث‌ها، تنها برای برخی ازمقدارهای n معلوم شده است (ومثلاً، درحالت خاص $n=۲^k$).

مسألهٔ ۱۹.۳. پاسخ: ۴ صفحه، فضا را به ۱۴ بخش، و ۵ صفحه، به ۲۲ بخش تقسیم می‌کنند.

سه صفحهٔ $\alpha_۱$، $\alpha_۲$ و $\alpha_۳$، فضا را به ۸ بخش تقسیم می‌کنند. وقتی‌که صفحـهٔ چهارم $\alpha_۴$ را رسم کنیم، هریـك از سه صفحهٔ قبلی را در خط راستی

قطع می‌کند و، این سه خط راست، از نقطهٔ مشترك صفحه‌ها می‌گذرند. این خط‌های راست، صفحهٔ α_4 را به ۶ زاویه تقسیم می‌کنند. بنابراین، صفحهٔ چهارم α_4، از آن ۸ بخشی که به وسیلهٔ صفحه‌های α_1، α_2 و α_3 درفضا به وجودآمده بود، ۶ بخش را قطع می‌کند و، هر کدام از آن‌ها را، به ۲ بخش تقسیم می‌کند. به این ترتیب، ۶ بخش جدید اضافه می‌شود و روی هم ۶+۸، یعنی ۱۴ بخش ایجاد می‌گردد.

درست به‌همین ترتیب، صفحهٔ پنجم، صفحه‌های قبلی را در چهار خط راست قطع و، درنتیجه، ۸ = ۲ × ۴ بخش به‌فضا اضافه می‌کند؛ روی هم ۲۲ = ۸ + ۱۴ بخش به‌وجود می‌آید.

▽ درحالت کلی هم، وقتی که با n صفحه سروکار داشته باشیم، می‌توان به‌همین ترتیب، استدلال کرد: صفحه‌های ششم، هفتم، ... و nام، به‌ترتیب، ۵ × ۲، ۶ × ۲، ... و $۲(n-۱)$ بخش جدید ازفضا را اضافه می‌کنند و، بنابراین، تعداد کل بخش‌ها، چنین می‌شود (بهتراست مجموع را از نخستین جمله بنویسیم):

$$۲+۲\times ۱+۲\times ۲+\ldots+۲(n-۱)=۲+۲[۱+۲+\ldots+$$

$$+(n-۱)]=۲+۲\times\frac{n(n-۱)}{۲}=n^۲-n+۲$$

مسألهٔ ۱۹.۳ را، می‌توان به‌صورت زیر، به‌مسألهٔ مسطحهٔ ۱۸.۳ منجر کرد: درنزدیکی یکی از n صفحه و در دو طرف آن، صفحه‌ای موازی با آن رسم می‌کنیم. دراین‌صورت، هر یك ازاین دو صفحه، به‌وسیلهٔ $(n-۱)$ فصل مشترك $(n-۱)$ صفحهٔ دیگرازصفحه‌های مفروض، به

$$\frac{۱}{۲}[(n-۱)^۲+(n-۱)+۲]=\frac{۱}{۲}(n^۲-n+۲)$$

بخش تقسیم می‌شود (بحث مسألهٔ ۱۸.۳ را ببینید)، و این $n^۲-n+۲$ بخش، درست به‌یك اندازه، درحوزه‌های مختلف فضا قراردارند.

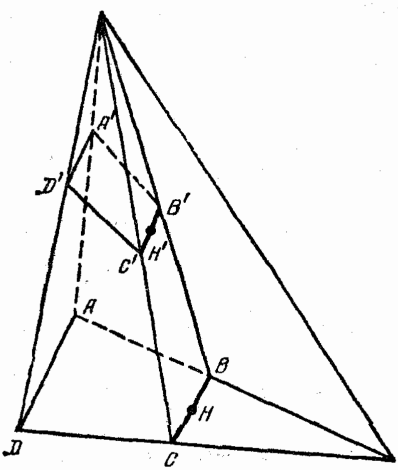
روشن است که شرح تقسیم فضا، به‌وسیلهٔ n صفحه‌ای که ازیك نقطهٔ

O می‌گذرند، با شرح تقسیم کرهٔ به‌مرکز O، بـه‌وسیلهٔ صفحه‌های دایره‌های عظیمه هم‌ارزاست. مثلاً، ۵ دایرهٔعظیمه، درحالت کلی، سطح کره را به ۱۰ مثلث، ۱۰ چهارضلعی و ۲ پنج ضلعی کروی تقسیم می‌کنند.

برای $n \geqslant 6$ (مثل حالـت مسألـهٔ ۱۸.۳ برای $n \geqslant 5$) ممکن است تقسیم‌های ازنوع‌های گوناگونی پدیدآید.

مسألهٔ ۲۰.۳. فصل مشترك وجه‌های روبه رو را درکنج چهار وجهی مفروض پیدا می‌کنیم. ازاین دوخط راست، صفحهٔ α را می‌گذرانیم. سپس، صفحهٔ β موازی با آن را، طوری رسم می‌کنیم که هرچهاریال کنج را قطع کند.

ثابت می‌کنیم، درمقطع، یك متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید. صفحهٔ β با فصل مشترك صفحه‌های دو وجه‌روبه‌روموازی است و، بنابراین، این دو وجه را، در دوخط راست موازی قطع می‌کند. به این ترتیب، درمقطع یك چهارضلعی به‌دست می‌آید که هردوضلع روبه‌روی‌آن، با هم موازی‌اند. ∇ اکنون نشان مـی‌دهیم که، چگونه می‌توان به‌کمك این ساختمان،



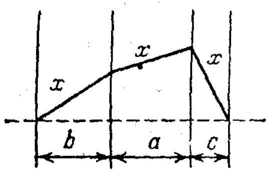
شکل ۳۷

دومسألهٔ ۹.۳ و۱۰.۳ را بههم ارتباط داد (شکل‌های ۲۵ و۳۷ را ببینید).

هرمی را درنظرمی گیریم که قاعدهٔ آن، یك ذوزنقه باشد. سطح جانبی هرم را با صفحه‌ای طوری قطع می‌کنیم که، در مقطع، یك متوازی‌الاضلاع به‌دست آید. دوضلع مقابـل این متوازی‌الاضلاع بـا ذوزنقهٔ قاعده موازی است.

در تصویرمرکزی (به‌مرکز رأس‌کنج چهاروجهی)، متوازی‌الاضلاع به ذوزنقه تبدیل می‌شود و نسبت پاره‌خطهای راست روی خطهای موازی، ثابت می‌ماند.

مسألهٔ ۲۱.۳. سطح جانبی منشور را روی صفحه می‌گسترانیم (شکل ۳۸). وجود مقطع مورد نظر، هم‌ارز است بـا وجـود خـط شکسته‌ای کـه رأس‌هـای آن، روی چهار خـط راست موازی این گسترده باشند و، درضمن، طول سه‌ضلع ایـن خط شکسته بـا هم برابر (وبرابر x) باشند واگردوانتهای خط شکسته را به‌هم وصل کنیم، خط راستی عمود بـرخطهای راست مـوازی به‌دست‌آید. بنابـراین، کافی است ثابت کنیم، معادلهٔ



شکل ۳۸

$$\sqrt{x^{2}-a^{2}}+\sqrt{x^{2}-b^{2}}=\sqrt{x^{2}-c^{2}} \qquad (1)$$

برای $a\geqslant b\geqslant c>0$ و $a<b+c$ جواب دارد.

این تابع را درنظرمی گیریم:

$$y=f(x)=\sqrt{x^{2}-a^{2}}+\sqrt{x^{2}-b^{2}}-\sqrt{x^{2}-c^{2}}$$

این تابع، به‌ازای $x^{2}\geqslant a^{2}$ معین وپیوسته است. توجه کنیم که

$$f(a)=\sqrt{a^{2}-b^{2}}-\sqrt{a^{2}-c^{2}}\leqslant 0$$

زیرا $b\geqslant c$؛ ولی

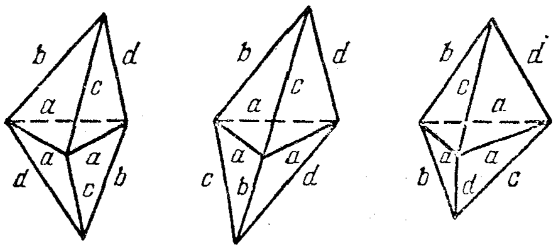
$$f(\sqrt{a^۲+b^۲})=b+a-\sqrt{a^۲+b^۲-c^۲}>۰$$

اگرمقدارهای تابع پیوسته، در دوانتهای یک بازه، علامت‌های مختلفی داشته باشند، آن وقت، مقدارتابع درنقطه‌ای واقع در درون این بازه برابر صفرمی‌شود. در مورد تابع ما، این وضع در بازهٔ $[a,\sqrt{a^۲+b^۲}]$ پیش آمده است. بنابراین، تابع $f(x)$، درنقطه‌ای مثل $x_۰$ واقع در درون این بازه برابرصفرمی‌شود: $f(x_۰)=۰$ و معادلهٔ $f(x_۰)=۰$ دارای جواب است.

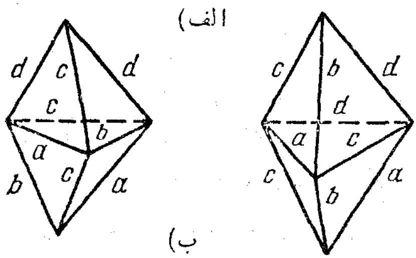
∇ جواب معادلهٔ (۱) با دستوری به‌دست می‌آید که، به کمك آن، می‌توان خط شکسته را با پرگاروخط‌کش رسم کرد.

مسألهٔ ۲۲۰۳. پاسخ: ممکن است.

مثالی می‌آوریم. هرمی را درنظرمی‌گیریم که، قاعدهٔ آن، مثلثی متساوی‌الاضلاع؛ فرجه‌های مجاوربه‌قاعده، زاویه‌هایی حاده ویال‌های جانبی آن با طول‌های مختلف باشند. به‌کمك دونمونه ازاین گونه هرم‌ها، می‌توان با قراردادن دوقاعدهٔ مساوی بریکدیگر، یك شش وجهی (هرم دوگانه) به‌سه‌طریق مختلف به‌دست‌آورد (شکل«۳۹ ـ الف»). همهٔ آن‌ها به‌کمك یك



الف)



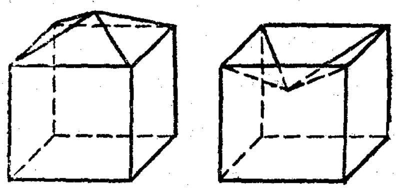
ب)

شکل ۳۹

دسته وجه به‌دست‌آمده‌اند، درحالی‌که با هم برابر نیستند. مثال دیگری را می‌توانید درشکل «۳۹ ـ ب» ببینید.

∇ اگرشهریارهمهٔ یال‌ها را شماره‌گذاری می‌کرد و روی هروجه مجاور به‌یال‌ها، شمارهٔ‌آن‌را می‌نوشت، آن‌وقت‌شروین، درست‌همان چندوجهی محدب را به‌دست می‌آورد: اگر وجه‌های یك چند وجهی محدب، به‌ترتیب، با وجه‌های متناظرخود درچند وجهی محدب دیگر، برابرباشند، آن وقت این چند وجهی‌ها برابرند (قضیهٔ کوشی).

قضیهٔ کوشی درمورد چند وجهی‌های مقعر، درستی خود را ازدست می‌دهد. مثالی ازآن را می‌توانید درشکل ۴۰ ببینید.

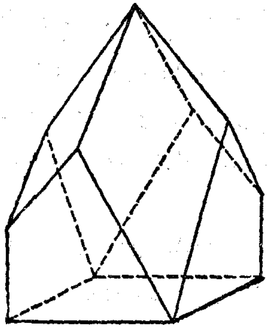


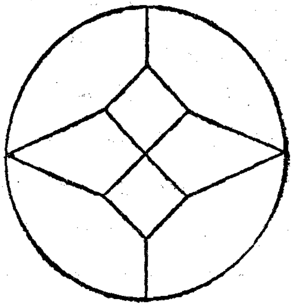
شکل ۴۰

این پرسش، ازمیانهٔ سدهٔ نوزدهم دربرابر ریاضی‌دانان است: آیا چند‌وجهی ناپایداری وجود دارد که از وجه‌های پایداری که با لولا به‌هم وصل شده‌اند، درست شده‌باشد؟ تنهادرسال ۱۹۷۷، ر.کونه‌لی، ریاضی‌دان‌امریکایی، توانست نمونه‌ای ازاین‌گونه چند وجهی‌ها را بسازد.

مسألهٔ ۲۳.۳. پاسخ: بله، وجود دارد.

این‌گونه چندوجهی را می‌سازیم (شکل ۴۱ را ببینید). هرم $ABCDE$ را طوری می‌سازیم که قاعدهٔ آن، لوزی $ABCD$ باشد و تصویر رأس E بر قاعده، روی مرکزلوزی قرارگیرد. درصفحهٔ قاعده، مربع A_1BC_1D را به قطر BD می‌سازیم (BD، قطر کوچکترلوزی است) و، سپس، مکعبی را درنظرمی‌گیریم که قاعدهٔ پایین‌آن، این مربع باشد. برخورد مکعب با هرم


شکل ۴۱


شکل ۴۲

وبخشی از هرم راکه بالای مکعب قراردارد، انتخاب می کنیم. چند وجهی موردنظر، به‌دست می‌آید.

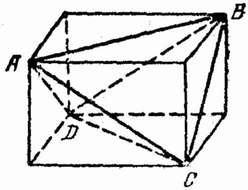
∇ به‌پرسش مسألهٔ ۲۳.۳، با اندکی هوشیاری، می‌شد خیلی ساده پاسخ داد. کافی است طرح مسطحه‌ای را که در شکل ۴۲ می‌بینید، رسم و، سپس، به‌قضیهٔ شته‌ی نیتس تکیه کنیم. این قضیه‌می گوید: به‌ازای شرطهای طبیعی درمورد طرح مسطحه، چند وجهی محدبی وجود دارد که، وجه‌ها و یال‌ها و رأس‌های آن، دوبه‌دو، همچون حوزه‌ها وخطها و گره‌های این‌طرح به‌هم مربوطاند (طرح شکل ۴۲ را با شکل ۴۱ مقایسه کنید).

مسألهٔ ۲۴.۳. مثلث $D_1D_2D_3$ با زاویه‌های حاده را باخطهای‌راست AB، AC و BC، که وسط ضلع‌ها را به‌هم وصل کرده‌اند، به‌عنوان گستردهٔ هرم $ABCD$ درنظرمی گیریم (رأس‌های D_1، D_2 و D_3، در یك نقطهٔ D، روی هم قرارمی‌گیرند؛ شکل ۴۳). اگر یالی متناظر با نصف ضلع مثلث $D_1D_2D_3$ باشد، آن وقت، یال متنافر با آن متناظربا پاره‌خط راستی موازی با آن است که وسط دوضلع مثلث را به‌هم وصل کرده است؛ و برعکس. بنابراین، یال‌های متنافر هرم، با هم برابرند.

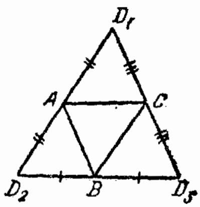
متوازی‌السطوحی می‌سازیم که چهار رأس غیرمجاورآن، بر رأس‌های هرم منطبق باشند. برای این منظور، ازهریال هرم، صفحه‌ای موازی یال

متنافر با آن رسم می‌کنیم. به این ترتیب، سه جفت صفحهٔ موازی به‌دست می‌آید که از برخورد آن‌ها یك متوازی‌السطوح ایجاد می‌شود. از آن جا که هر دو یال متنافر هرم، طولی برابر دارند، هر وجه متوازی‌السطوح، متوازی‌الاضلاعی با قطرهای برابر می‌شود، یعنی وجه‌های متوازی‌السطوح، به‌شکل مستطیل درمی‌آیند. متوازی‌السطوحی که همهٔ وجه‌های آن مستطیل باشند، یك مکعب مستطیل است.

▽ قضیهٔ عکس هم درست است: اگر رأس‌های یك هرم، چهار رأس غیرمجاور مکعب مستطیلی را تشکیل دهند، آن وقت، گستردهٔ این هرم، مثلثی با زاویه‌های حاده خواهد شد که وسط ضلع‌های آن به‌هم وصل شده



شکل ۴۴



شکل ۴۳

است. در واقع (شکل ۴۴ را ببینید)، به‌هر رأس، سه مثلث یکسان مربوط می‌شود؛ درضمن سه‌زاویه‌ای که، ازاین مثلث‌ها، دریك رأس به‌هم رسیده‌اند، سه‌نام مختلف دارند ومی‌دانیم، مجموع زاویه‌های هرمثلث برابر ۱۸۰ درجه است، یعنی مجموع زاویه‌های مسطحه در رأس هرم، برابر ۱۸۰ درجه می‌شود.

هرمی که، همهٔ وجه‌های آن با هم برابر باشند (بدون این که لزومی به‌متساوی‌الاضلاع بودن این وجه‌ها باشد)، اغلب هرم متساوی‌الوجه نامیده می‌شود.

درچنین هرمی:

۱) یال‌های متنافر، دوبه‌دو، باهم برابرند؛

۲) مرکزکرهٔ محاطی هرم برمرکزکرهٔ محیطی آن منطبق است؛

۳) تصویر برهرصفحه‌ای که موازی با دویال متنافر باشد، یك مستطیل است؛

۴) مجموع زاویه‌های مسطحهٔ کنجی که درهر رأس تشکیل شده، برابر ۱۸۰ درجه است؛

۵) هرپاره خط راستی که وسط دویال روبه‌رو را به‌هم‌وصل کند، براین یال‌ها عمود است. این گزاره را می‌توان به‌صورت گزارهٔ زیر، که هم‌ارزآن است، بیان کرد: اگر هرم را به اندازهٔ ۱۸۰ درجه دور پاره خط راستی که وسط دوضلع روبه‌رو را به‌هم وصل کرده است، دوران دهیم، هرم برخودش منطبق می‌شود (این پاره‌خط‌های راست، محورهای تقارن مکعب مستطیلی را تشکیل می‌دهند که برهرم محیط است)؛

۶) سه پاره‌خط راستی که وسط‌یال‌های روبه‌رو را به‌هم وصل می‌کنند، دوبه‌دو برهم عمودند.

جالب است که از هریك ازاین ویژگی‌ها، می‌توان‌ویژگی‌های دیگر را نتیجه گرفت.

مسألهٔ ۲۵.۳. پاسخ: $\pi-\alpha$، $\pi-\beta$ و $\pi-\gamma$.

دو نیم خط ازسه نیم خط راستی راکه رسم‌کرده‌ایم، درنظرمی‌گیریم. فرض می‌کنیم وجه‌های عمود بر این دونیم خط، زاویه‌ای برابر α با هم ساخته باشند. یال این‌زاویهٔ دو وجهی، برصفحه‌ای که ازدو نیم خط انتخابی گذشته، عمود است و، بنابراین، با این صفحه، زاویه‌ای برابر α می‌سازد. ضلع‌های این زاویه و نیم خطهای انتخابی، صفحه را به‌چهار زاویه تقسیم می‌کنندکه، یکی ازآن‌ها، برابر α است، دوخط راست مجاورآن، که زاویهٔ چهارم را تشکیل می‌دهند ــ زاویهٔ بین نیم خطهای راست انتخابی ــ برابر $\pi-\alpha$ می‌شود.

∇ مسألهٔ ۲۵.۳ نشان می‌دهد که چگونه زاویه‌های مسطحهٔ یك کنج

سه‌وجهی، با زاویه‌های دو وجهی یك کنج سه‌وجهی دیگرارتباط دارد. برای کنج‌های سه‌وجهی، می‌توان به‌سادگی دستورکسینوس‌ها را به‌دست‌آورد که، به کمك آن، با در دست داشتن زاویه‌های مسطحهٔ A، B و C، زاویه‌های دو وجهی کنج محاسبه می‌شود؛ مثلاً کسینوس زاویهٔ دو وجهی γ رامی‌توان، به‌این ترتیب، محاسبه کرد:

$$\cos\gamma=\frac{\cos C-\cos A\cos B}{\sin A\sin B} \tag{۱}$$

حل‌مسألهٔ عکس، دشوارتراست: با در دست‌داشتن زاویه‌های دووجهی α، β و γ، کسینوس زاویه‌های مسطحهٔ کنج‌را پیدا کنید. ولی اگرازساختمانی که درمسألهٔ ۲۵.۳ داشتیم، استفاده کنیم، به کمك کنج سه‌وجهی جدیدی که به‌دست می‌آید، دستور لازم، به‌خودی خود، پیدا می‌شود.

ازحل مسألهٔ ۲۵.۳ می‌دانیم که، اگر A، B و C زاویه‌های مسطحه و α، β و γ زاویه‌های دو وجهی یك کنج سه وجهی باشند، آن وقت $\alpha'=\pi-A$، $\beta'=\pi-B$، $\gamma'=\pi-C$، زاویه‌های دو وجهی و $A'=\pi-\alpha$، $B'=\pi-\beta$، $C'=\pi-\gamma$، زاویه‌های مسطحهٔ کنج سه وجهی جدید خواهند بود. دستور کسینوس‌ها را برای کنج جدید می‌نویسیم:

$$\cos\gamma'=\frac{\cos C'-\cos A'\cos B'}{\sin A'\sin B'}$$

دراین صورت

$$\cos(\pi-C)=\frac{\cos(\pi-\gamma)-\cos(\pi-\alpha)\cos(\pi-\beta)}{\sin(\pi-\alpha)\sin(\pi-\beta)}$$

که از آن جا، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$\cos C=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} \tag{۲}$$

دستورهای (۱) و (۲) را، دستورکسینوس‌ها برای مثلث کروی هم

می‌نامند. کره‌ای به‌شعاع واحد را درنظرمی گیریم که مرکزآن، در رأس کنج سه‌وجهی باشد. کنج سه‌وجهی، روی سطح این کره، یك مثلث با ضلع‌های منحنی جدا می‌کند. ضلع‌های این مثلث، کمان‌هایی از دایره‌های عظیمهٔ به شعاع واحد وطول‌های آن‌ها، به‌ترتیب، برابر با مقدار زاویه‌های مسطحهٔ A، B و C (برحسب رادیان) از کنج سه وجهی می‌شوند. زاویه‌های این مثلث، همان زاویه‌های دو وجهی α، β و γ، از کنج سه وجهی هستند. به‌کمك دستور (۱) می‌توان زاویه‌های این مثلث را از روی سه ضلع‌آن، و به‌کمك دستور (۲) ضلع‌های‌آن را از روی سه زاویه به‌دست‌آورد.

کنجی هم‌که در مسألهٔ ۲۵.۳ ساختیم، مثلث دیگری ازسطح کره جدا می‌کندکه قطبی مثلث اول نامیده می‌شود. در مسألهٔ ۲۵.۳ روشن شدکه چه‌رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های این دومثلث وجود دارد.

مسأله‌هایی برای‌کارمستقل دانش‌آموزان

۲۶.۳. a، b، c، d و e، پاره خطهای راست مفروض‌اند. به‌کمك پرگاروخط‌کش، این پاره خطهای راست را بسازید:

۱) $\sqrt{ab}$؛ ۲) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$؛ ۳) $\frac{ab}{c}$؛

۴) $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$؛ ۵) $\frac{abc}{de}$؛ ۶) $a\sqrt[4]{2}$؛ ۷) $\sqrt{a^2+ab+ac}$؛

۸) $\sqrt[4]{abcd}$؛ ۹) $\sqrt[4]{a^3b+ab^3}$؛ ۱۰) $\sqrt{\frac{a^3}{b}+\frac{c^3}{d}}$

۲۷.۳. روی خط راستی، پاره خطهای راست a و b $(b>a)$ داده شده‌اند. تنها به‌کمك یك پرگار، پاره خط راستی بسازیدکه طول آن بایکی ازدستورهای زیرداده شده باشد:

۱) $\sqrt{b^2-a^2}$؛ ۲) $a\sqrt{3}$؛ ۳) $a\sqrt{2}$؛ ۴) $\sqrt{b^2+a^2}$

۲۸.۳. ازمثلثی، دو ضلع a و b معلوم است $(b>a)$ و می‌دانیم زاویهٔ روبه‌رو به یکی ازاین ضلع‌ها، دو برابر زاویهٔ روبه‌رو به ضلع دیگر است. مثلث را به‌کمك پرگاروخط‌کش رسم کنید.

۲۹.۳. یك دایره ونقطه‌ای دربیرون آن مفروض‌اند. به‌کمك پرگارو خط‌کش، قاطعی رسم کنید که ازنقطهٔ مفروض بگذرد و وتری در دایره به‌وجود آورد که با پاره‌خط راست بیرون دایره، طولی برابرداشته باشد.

۳۰.۳. دوشعاع دایره‌ای را رسم کرده‌ایم. به‌کمك پرگار و خط‌کش، وتری در دایره رسم کنید که به‌وسیلهٔ این دوشعاع، به سه بخش برابرتقسیم شود.

۳۱.۳. به‌کمك پرگار وخط‌کش، درقطعه‌دایرهٔ مفروض، مربعی محاط کنید.

۳۲.۳. روی صفحهٔ مختصاتی، نیم موج سینوسوئید رسم شده است $(y=\sin x، 0\leqslant x\leqslant \pi)$. به‌کمك پرگاروخط‌کش، مستطیلی بامحیط مفروض P را طوری رسم کنید که دو رأس آن روی سینوسوئید و دو رأس دیگرش روی محور Ox باشد.

۳۳.۳. دوپاره خط با طول‌های ۱ و π داده شده‌اند. به‌کمك پرگارو خط‌کش، مربعی رسم کنید که با دایرهٔ مفروض، هم‌ارزباشد.

۳۴.۳. نمودارتابع $y=x^3$ روی صفحهٔ مختصاتی رسم شده است. با استفاده ازاین نمودار و به کمك پرگاروخط‌کش، زاویهٔ مفروض را به سه بخش برابرتقسیم کنید.

۳۵.۳. دو آئینه با هم، زاویه‌ای حاده می‌سازند. پرتو نور بریکی از ضلع‌های آن می‌تابد. ثابت کنید، هرقدرهم که زاویه کوچك باشد، پرتو نور، بعد ازچند انعکاس، ازآن خارج می‌شود.

۳۶.۳. توپ بیلیارد از یك گوشهٔ میزمستطیلی بیلیارد با اندازه‌های 86×19، بازاویهٔ ۴۵ درجه حرکت می‌کند. درکدام یك ازسوراخ‌هایی که

درگوشه‌های میز وجود دارند، می‌افتد و، قبل ازآن، چندبار به کناره‌های میزمی‌خورد (هم توپ وهم سوراخ را، نقطه به‌حساب می‌آوریم).

۰۳۷۰۳ روی ضلع AB از مثلث ABC، مثلث متساوی‌الاضلاعی ساخته‌ایم. مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ رأس C تا مرکزاین مثلث، به‌شرطی که طول ضلع AB برابر c واندازهٔ زاویهٔ C برابر ۱۲۰ درجه باشد.

۰۳۸۰۳ تنها به کمك خط‌کشی که تقسیم‌های یك سانتی متری دارد، زاویهٔ مفروض را به‌دوبخش برابرتقسیم کنید.

۰۳۹۰۳ یك پانزده ضلعی منتظم، به‌کمك پرگاروخط‌کش رسم کنید.

۰۴۰۰۳ دونقطهٔ A و B را، روی صفحه، طوری انتخاب کرده‌ایم که فاصلهٔ بین‌آن‌ها، برابرعدد درست n باشد. همهٔ دایره‌های به‌مرکزهای A و B را، که شعاع آن‌ها عددی درست است، رسم کرده‌ایم. روی شبکهٔ حاصل، دنباله‌ای از گره‌ها (نقطه‌های برخورد دایره‌ها) را علامت می‌گذاریم، به نحوی که هر دو گرهٔ مجاور، رأس مقابل چهار ضلعی منحنی‌الخط باشند:

الف) شکل را با انتخاب واحد ۵/ ۰ سانتی متری و $n = 12$ رسم کنید.

ب) ثابت کنید، نقطه‌های این دنباله، یا روی محیط یك بیضی واقع‌اند و یا روی یك هذلولی.

۰۴۱۰۳ الف) شکلی ازسه پاره خط راست، روی صفحه رسم کنید که دارای شش محورتقارن باشد.

ب) آیاممکن‌استدراجتماع سه پاره‌خط‌راست درصفحه، بیش‌ازشش محورتقارن داشته باشیم؟

۰۴۲۰۳ مثلث ABC مفروض است. روی ضلع‌های AB و BC، نقطه‌های K و L را طوری پیداکنید‌که:

الف) $AK = KL = LB$؛ ب) $AK = KL = LC$.

۰۴۳۰۳ وسط پاره‌خط راست مفروضی، علامت گذاشته‌شده است. تنها

به‌کمك خط‌کش، خط راستی رسم کنید که از نقطهٔ مفروضی بگذرد و با این پاره خط راست، موازی باشد.

۴۴.۳. دو خط راست موازی و، روی یکی از آن‌ها، پاره خط راستی داده شده است. به‌کمك خط‌کش، پاره خط راستی بسازید که، طول آن، دو برابر طول پاره خط راست مفروض باشد.

۴۵.۳. روی سه‌ضلع مثلثی با زاویه‌های حاده، سه‌دایره رسم کرده‌ایم، به نحوی که این ضلع‌ها، قطرهای دایره را تشکیل دهند. ثابت کنید، وترهای مشترك دو به‌دوی این دایره‌ها، ارتفاع‌های مثلث‌اند.

۴۶.۳. مثلثی با زاویه‌های حاده مفروض است. روی هر ضلع مثلث، نقطه‌ای را درنظر گرفته‌ایم و به‌رأس روبه‌روی آن ضلع وصل کرده‌ایم. روی این سه پاره خط راست، و به قطر هر یك از آن‌ها، سه‌دایره رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، وترهای مشترك دو به‌دوی این دایره‌ها، درمحل برخورد ارتفاع‌های مثلث اصلی، به‌هم می‌رسند.

۴۷.۳. بهنام چهارنقطه روی صفحه علامت گذاشت، شش فاصلهٔ بین دو به‌دوی این نقطه‌ها را اندازه گرفت و، این شش عدد را، به‌اطلاع شیرین رسانید. شیرین، چهارنقطه روی صفحه پیدا کرد که فاصلهٔ دو به‌دوی آن‌ها، همان شش عدد بود. آیا شکلی که شیرین به‌دست آورده است، باید برشکل رسم شده به‌وسیلهٔ بهنام منطبق باشد، به‌شرطی که:

الف) شیرین تنها همین شش عدد را دراختیار داشته باشد؛

ب) علاوه بر آن، شیرین بداند که هر فاصله مربوط به کدام دو نقطه است؟

۴۸.۳. روی صفحه، n خط راست مختلف رسم شده است. اگر از نقطه‌ای، k عدد از این خط‌های راست گذشته باشد، آن وقت، عدد $(k-1)$ را، مضرب این نقطه می‌نامیم. اگر مجموع مضرب‌های همهٔ نقطه‌های برخورد خط‌های راست را، m بگیریم، ثابت کنید، این n خط راست، صفحه را به $(n+m+1)$

بخش تقسیم می‌کنند.

۴۹.۳. الف) جفت عدد(n_1, n_2)را $(n_1 \leqslant n_2)$، قابل اجرا می‌نامیم به‌شرطی‌که بتوان مثلث را، به‌وسیلهٔ خط راستی‌که از نقطهٔ درونی آن می‌گذرد، به n_1 ضلعی و n_2 ضلعی تقسیم‌کرد. چند جفت عدد قابل اجرا وجود دارد؟

ب) چهارعدد(n_1, n_2, n_3, n_4) را $(n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4)$، قابل‌اجرا می‌نامیم، وقتی‌که مثلث را بتوان با رسم دوخط راستی که از نقطهٔ درونی آن می‌گذرند، به n_1 ضلعی، n_2 ضلعی، n_3 ضلعی و n_4 ضلعی تقسیم‌کرد. چندگروه چهارعددی قابل اجرا وجود دارد؟

۵۰.۳. چهارصفحه، فضا را، به ۱۵ بخش‌تقسیم‌کرده‌اند. درچند بخش ازاین بخش‌ها، می‌توان‌کره‌ای جا دادکه برهرچهارصفحه مماس باشد؟

۵۱.۳. هریال یك چهاروجهی را به۴ بخش برابرتقسیم و، از هرنقطهٔ تقسیم، صفحه‌هایی عمود بر همهٔ وجه‌های‌آن رسم‌کرده‌ایم. چهار وجهی به‌چند بخش تقسیم می‌شود؟

۵۲.۳. چهارکره، فضا را، حداکثربه چند بخش تقسیم می‌کنند؟

۵۳.۳. الف) اگرصفحه‌ای ازمرکزمکعب بگذرد و بریکی ازقطرهای آن عمود باشد، دربرخورد با مکعب چه‌مقطعی به‌دست می‌دهد؟

ب) قطر d ازمکعب را، به‌عنوان محور Ox انتخاب می‌کنیم (نقطهٔ O، مرکز مکعب است) و $S(x)$ را مساحت مقطع مکعب با صفحه‌ای می‌گیریم که برقطرd عمود و ازنقطهٔ x واقع برقطر گذشته است. نمودار تابع $S(x)$ را رسم‌کنید.

۵۴.۳. دریك چهاروجهی، زاویه‌های دو وجهی مربوط به هردویال روبه‌رو، برابرند. آیا درست است‌که، دراین چهاروجهی، یال‌های روبه‌رو طولی برابردارند؟

۵۵.۳. یك شش وجهی بسازیدکه در هر رأس‌آن سه‌یال به هم رسیده باشند و، درضمن، درست دو وجه‌آن، مستطیل باشد.

۵۶۰۳. کره‌ای به‌شعاع واحد و کنجی سه وجهی که رأس‌آن درمرکز کره است، مفروض‌اند. ثابت‌کنید، مساحت مثلث کروی که از برخورد کنج با سطح کره به‌دست می‌آید، برابراست با $(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$، که درآن،$\alpha$، β و γ، عبارتند از مقدار زاویه‌های دو وجهی این کنج سه وجهی (که در واقع، همان زاویه‌های مثلث کروی‌اند).

۴

نابرابری. اکسترمم. ارزیابی.

۴.۱. درمثلث قائم‌الزاویه، a و b ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه، c وتر و h، ارتفاع وارد بروتراست. ثابت کنید $c+h$ از $a+b$ بزرگتراست.

۴.۲. معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد و $a+b+c<0$. عدد c چه‌علامتی دارد؟

۴.۳. مستطیل $ABCD$ داده‌شده‌است. نقطهٔ دلخواهی‌درآن انتخاب و ازآن جا، دوخط راست موازی با ضلع‌های مستطیل رسم‌کرده‌ایم. این خطهای راست، مستطیل را به‌چهارمستطیل کوچکترتقسیم کرده‌اند. ثابت کنید، یکی از دومستطیلی که شامل نقطه‌های A و C هستند، مساحتی دارد که از $\frac{1}{4}$ مساحت مستطیل اصلی تجاوزنمی‌کند.

۴.۴. ۱۰۰۰ ریال دربانك گذاشته‌ایم. درکدام حالت، بعد ازگذشت ۱۰ سال، پول بیشتری نصیب ما می‌شود: وقتی‌که بانك ۵٪ مبلغ موجودی

را درهرسال به‌آن اضافه کند یا وقتی $\frac{۵}{۱۲}$٪ موجودی‌راهرماه به‌آن بیفزاید؟

۵۰۴. اتوبوس‌را وقتی‌پربه‌حساب‌می‌آوریم که‌بیش ازپنجاه مسافرداشته باشد. دوبازرس، ستون‌اتوبوس‌ها را متوقف‌می‌کنند. اولی درصد اتوبوس‌های پر را محاسبه می‌کند و دومی، درصد مسافرانی را که در اتوبوس‌های پر نشسته‌اند. کدام یك درصد بیشتری به‌دست می‌آورند؟

۶۰۴. حداقل تعداد شرکت‌کنندگان درانجمن ریاضی چند نفرمی‌تواند باشد، به‌شرطی‌که بدانیم، تعداد پسرها در این انجمن: الف) کمتراز ۵۰٪، ولی بیشتراز ۴۰٪؛ ب) کمتراز ۴۴٪، ولی بیشتر از ۴۳٪ باشند؟

۷۰۴. می‌دانیم لاستیك‌های جلوی یك‌کامیون بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیك‌های عقبی بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومترفرسوده می‌شوند (درهرچرخ عقب، دولاستیك و درهرچرخ جلو، یك لاستیك ازهمان نوع وجود دارد). لاستیك‌های چرخ‌ها را چگونه عوض‌کنیم تا، با همان لاستیك‌های اولیه، حداکثرمسافت را طی‌کند؟ این مسافت را پیدا کنید.

۸۰۴. دخترکوچك خانواده، نان شیرینی را در۱۰ دقیقه، نان و پنیر را در۱۳ دقیقه و یك لیوان شیر را در ۱۴ دقیقه می‌خورد؛ برادربزرگترش، همین‌کارها را، به‌ترتیب، در ۶، ۶ و ۷ دقیقه انجام می‌دهد. اگر صبحانهٔ این دونفر، شامل نان شیرینی، نان و پنیر ویك لیوان شیرباشد، حداقل زمان صرف صبحانه چقدراست؟

۹۰۴. بهروز ومینا، معمولاً درایستگاه مترو با هم ملاقات می‌کنند. فرض می‌کنیم، قطارهای مترو، در فاصله‌های زمانی برابر از این ایستگاه بگذرند. باراول، بهروز ۱۲ دقیقه منتظر مینا ماند و، دراین مدت، ۵ قطار عبورکرد. باردوم ۲۰ دقیقه درانتظار مینا بود و، دراین مدت، ۶ قطارعبور کرد. بارسوم، ۳۰ دقیقه منتظربود. دراین فاصلهٔ زمانی، چند قطار می‌تواند عبور کند؟

۱۰۰۴. چند صندوق بزرگ، روی هم ۱۰ تن وزن دارند، در ضمن،

سنگینی هیچ‌کدام از آن‌ها، از یك تن بیشتر نیست. دست‌کم، چند کامیون سه تنی، برای حمل این صندوق‌ها، کافی است؟

۰۱۱۰۴ سه عدد پیدا کنید که، هر کدام از آن‌ها، برابر با مجذور تفاضل دو عدد دیگر باشد.

۰۱۲۰۴ ثابت کنید، برای هر دو عدد طبیعی m و n، $(m, n > ۱)$، دست‌کم، یکی از عددهای $\sqrt[n]{m}$ و $\sqrt[m]{n}$، از $\sqrt[۳]{۳}$ تجاوز نمی‌کند.

۰۱۳۰۴ به‌ازای کدام n، عبارت

$$\frac{\log ۲ \cdot \log ۳ \cdots \log n}{۱۰^n}$$

به‌حداقل مقدار خود می‌رسد؟

۰۱۴۰۴ عددهای $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ و $x_۵$ غیرمنفی‌اند و می‌دانیم:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱$$

حداکثر مقدار $x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + x_۳x_۴ + x_۴x_۵$ را پیدا کنید.

۰۱۵۰۴ درستی نابرابری زیر را، برای هر مقدار a، b و c پیدا کنید:

$$a^۴ + b^۴ + c^۴ \geqslant a^۲bc + b^۲ac + c^۲ab$$

۰۱۶۰۴ ثابت کنید، برای عددهای مثبت a و b، همیشه داریم:

$$۲\sqrt{a} + ۳\sqrt[۳]{b} \geqslant ۵\sqrt[۵]{ab}$$

۰۱۷۰۴ ثابت کنید، در هر شش ضلعی محدب، قطری پیدا می‌شود که، از آن، مثلثی را جدا می‌کند، به‌نحوی که مساحت آن از $\frac{۱}{۶}$ مساحت شش‌ضلعی تجاوز نمی‌کند.

۰۱۸۰۴ ثابت کنید، نابرابری زیر، برای زاویه‌های دلخواه α، β و γ، که مقداری بین ۰ و π داشته باشند، برقرار است:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leqslant ۳\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳}$$

۰۱۹.۴ ازبین چهارضلعی‌هایی که سه ضلع برابر واحد دارند، مساحت کدام یك حداکثراست؟

۰۲۰.۴ چند وجهی محدبی که پنج رأس دارد، درکره‌ای به‌شعاع واحد محاط شده است. حداکثرحجم این چند وجهی، چقدراست؟

۰۲۱.۴ روی یك کاغذ شطرنجی که طول ضلع هرخانـهٔ‌آن برابر واحد است، دایره‌ای به‌شعاع ۱۰ رسم کرده‌ایم. ثـابت‌کنید، بیش از۲۵۰ گره، از شبکه، در درون این دایره وجود دارد.

۰۲۲.۴ آیا مـی‌توان ازنقطهٔ O، ۱۵ نیم خـط راست درفضا طوری رسم کرد که، زاویهٔ بین هردونیم خط دلخواه، بیش از۶۰ درجه باشد؟

۰۲۳.۴ روی محیط دایرهٔ اول، از دو دایرهٔ برابر، سه‌کمان و هر یك برابر ۲۵ درجه و روی محیط دایرهٔ دوم، دوکمان و هرکدام برابر۳۰درجه جداکرده‌ایم. ثابت‌کنید، می‌توان‌دایرهٔ دوم‌را روی دایرهٔ اول‌طوری قرارداد که، کمان‌های جدا شده، یکدیگر را قطع نکنند.

۰۲۴.۴ پنج وزنه، با وزن‌های متفاوت دراختیار داریم. ثابت کنید، با ۷ باراستفاده از تـرازو، می‌توان ایـن پنج وزنـه را به ترتیب صعودی وزن‌های آن‌ها، درکنارهم چید (با هرباراستفاده ازترازو، می‌توان، وزن دو وزنه را با هم مقایسه‌کرد).

بحث و بررسی مسأله‌ها

مسألهٔ ۰۱.۴ اگرمساحت مثلث را به دو طریق محاسبه کنیم، به‌دست می‌آید: $ch=ab$؛ ازآن‌جا $h=\frac{ab}{c}$. نابرابری $c+h>a+b$ را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$c+\frac{ab}{c}>a+b$$

اگردوطرف‌این نابرابری را در c ضرب کنیم ($c>0$)، به نابرابری زیر که هم‌ارز نابرابری فوق است، می‌رسیم:

$$c^2-c(a+b)+ab>0$$

و یا

$$(c-a)(c-b)>0$$

و این نابرابری، همیشه برقرار است، زیرا وتر، ازهر ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه بزرگتراست.

∇ درحل این مسأله، در واقع، ثابت کردیم: اگرحاصل‌ضرب‌های ch و ab، ازدو زوج عدد مثبت، برابرباشند، آن‌وقت، مجموع دوعددی‌بزرگتر است که «از هم دورترند»؛ اگرعددهای مثبت a و b، بین عددهای مثبت c و h باشند، آن وقت $c+h>a+b$. این حقیقت را، ازاین‌جا هم می‌توان نتیجه گرفت که، تابع $f(x)=x+\frac{A}{x}$، به ازای $x\geqslant\sqrt{A}$، به‌طور یکنوا، صعودی است.

مسألهٔ ۲۰۴. پاسخ: $c<0$.

تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ را درنظرمی‌گیریم. بنابرشرط مسأله، این تابع نمی‌تواند برابر صفر شود، بنابراین تمامی نمودار آن، یا دربالای محور Ox ویا درپایین‌آن قراردارد.

از طرف دیگر $f(1)=a+b+c$، بنابرشرط، عددی منفی است، یعنی سهمی نمودارتابع $f(x)$، در زیرمحور Ox واقع‌است. به‌این ترتیب، $f(x)$، به‌ازای همهٔ مقدارهای x، منفی است‌و، درنتیجه، $f(0)=c<0$.

∇ در واقع، درحل مسأله، ازپیوستگی تابع f استفاده‌کردیم: اگر تابعی دریك بازهٔ معین، پیوسته باشد و برابرصفر نشود، آن وقت، مقدارتابع دراین بازه، همیشه علامت ثابتی دارد.

مسألهٔ ۳.۴. محورهای تقارن مستطیل‌را رسم می‌کنیم. این محورهای تقارن، مستطیل را به‌چهاربخش برابرتقسیم می‌کنند. اگرنقطهٔ انتخابی، در یکی از دو بخشی‌که شامل نقطه‌های A و C است، یا برمحیط این بخش‌ها قرارگیرد، آن وقت، درستی حکم مسأله، روشن است.

اکنون فرض می‌کنیم، نقطهٔ مفروض، دریکی ازدوبخش دیگرمستطیل واقع باشد. قرینهٔ هردوخطراستی راکه رسم‌شده‌اند، نسبت به‌مرکزمستطیل، پیدا می‌کنیم.

این چهارخط راست (دوخط راست تقسیم، ودوقرینهٔ‌آن‌ها)، مستطیل را به ۹ بخش تقسیم می‌کنند: چهاربخش به‌مساحت S_1، دوبخش به‌مساحت S_2، دوبخش به‌مساحت S_3 و یک بخش بـه‌مساحت S_0 (شکل ۴۵). باید ثابت‌کنیم که، S_1+S_2 یا S_1+S_3 از $\frac{1}{4}S$ تجاوزنمی‌کند (S را، مساحت مستطیل گرفته‌ایم). چون

$$4S_1+2S_2+2S_3=S-S_0<S$$

بنابراین

$$2S_1+S_2+S_3<\frac{1}{2}S\Rightarrow(S_1+S_2)+(S_1+S_3)<\frac{1}{2}S$$

یعنی یـکی ازعـددهـای S_1+S_2 و S_1+S_3 از $\frac{1}{4}S$ کوچکتراست (اگر هیچ‌کدام، از $\frac{1}{4}S$ کوچکتر نباشند، آن وقت مجموع‌آن‌ها، از $\frac{1}{2}S$ کـوچکتر نمی‌شود).

S_1	S_3	S_1
S_2	S_0	S_2
S_1	S_3	S_1

شکل ۴۵

∇ مسألهٔ فضایی زیر، که با مسألهٔ ۳.۴ شباهت دارد، جالب است: فرض کنید $V_1\leqslant V_2\leqslant\ldots\leqslant V_8$ حجم‌های هشت بخشی باشند که از یک

متوازی‌السطوح به‌حجم‌واحد، به‌وسیلهٔ سه‌صفحه‌ای که ازیك نقطهٔ آن گذشته وبا وجه‌های آن موازی‌اند، به‌دست‌آمده است؛ هریك ازمقدارهای V_i،($i=۱،۲،...،۸$)، درچه محدوده‌ای تغییر می‌کنند؟ مثلاً معلوم شده است‌که $\frac{۱}{۸}\geqslant V_۴\geqslant ۰$، و برای هرمقدار $V_۴$ از این فاصله، تقسیم متناظری ازمتوازی‌السطوح وجود دارد (برای اثبات نابرابری $V_۴\leqslant \frac{۱}{۸}$، بهتراست ازاین حقیقت استفاده‌کنیم که، دوبخش‌رو به‌رو، حجم‌هایی دارندکه، حاصل‌ضرب‌آن‌ها، از $\frac{۱}{۶۴}$ تجاوزنمی‌کند). همین مسأله را، برای متوازی‌السطوح n بعدی به‌حجم واحد هم، می‌توان طرح کرد.

مسألهٔ ۴.۴. پاسخ: وقتی بانك درصد را ماه به‌ماه محاسبه‌کند.

فرض‌کنیم، درصد را سالی‌یك‌بارمحاسبه‌کنند. دراین‌صورت، موجودی درآخرسال اول، چنین است:

$$\text{ریال}\ \ ۱۰۰۰+۱۰۰۰\times\frac{۵}{۱۰۰}=۱۰۰۰\left(۱+\frac{۵}{۱۰۰}\right)$$

درآخرسال دوم، باز هم‌٪۵ این مبلغ، به‌موجودی اواضافه می‌شود و به‌این صورت درمی‌آید:

$$\text{ریال}\ \ ۱۰۰۰\left(۱+\frac{۵}{۱۰۰}\right)\left(۱+\frac{۵}{۱۰۰}\right)=۱۰۰۰\left(۱+\frac{۵}{۱۰۰}\right)^{۲}$$

و اگراستدلال را به‌همین ترتیب ادامه دهیم، موجودی درآخر سال دهم برابرمی‌شود با

$$\text{ریال}\ \ ۱۰۰۰\left(۱+\frac{۵}{۱۰۰}\right)^{۱۰}$$

اکنون به‌حالتی می‌پردازیم‌که درصدها را بعد از گذشت هر ماه درنظر بگیرند. دراین‌حالت،مقدار موجودی، بعد از۱۰ سال،یعنی‌بعد ازگذشت ۱۲۰

ماه، چنین می‌شود:

$$1000\left(1+\frac{5}{1200}\right)^{120} \text{ریال}$$

ثابت می‌کنیم، مبلغ دوم ازمبلغ اول بیشتر است. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم:

$$1+\frac{5}{100}<\left(1+\frac{5}{1200}\right)^{12}$$

محاسبهٔ سمت راست نابرابری را آغاز می‌کنیم که برابراست با حاصل‌ضرب دوازده عامل یکسان

$$\left(1+\frac{5}{1200}\right)\left(1+\frac{5}{1200}\right)\ldots\left(1+\frac{5}{1200}\right)$$

روشن است که از ضرب جمله‌های برابر واحد درپرانتزها، عدد ۱ به دست می‌آید. اگر عدد $\frac{5}{1200}$ را دریکی از پرانتزها درنظربگیریم و در یازده پرانتز دیگرعدد واحد را، آن وقت ازحاصل ضرب آن‌ها $\frac{5}{1200}$ به دست می‌آید و چون ۱۲ جمله ازاین گونه داریم، روی هم برابر $12\times\frac{5}{1200}$، یعنی $\frac{5}{100}$ می‌شود. بنابراین

$$\left(1+\frac{5}{1200}\right)^{12}=1+\frac{5}{100}+\ldots$$

و به‌روشنی از $1+\frac{5}{100}$ بزرگتراست.

▽ فرض کنید K ریال دربانك گذاشته باشیم وبانك $p\%$، سالیانه به‌آن اضافه‌کند. اگرشبیه حل مسألهٔ ۴.۴ استدلال کنیم، معلوم می‌شود که میزان

موجودی، درپایان m سال برابراست با

$$K\left(1+\frac{p}{100}\right)^m \text{ ریال}$$

که آن را، دستورمحاسبهٔ رنج مرکب هم می‌نامند.

این مقدار را، می‌توان از طرف پایین و به‌کمك نابرابری برنولی ارزیابی کرد. نابرابری برنولی چنین است:

$$(1+x)^n > 1+nx \quad (x>0, n>1)$$

(درحل مسألهٔ ۴.۴ داشتیم: $x=\frac{5}{1200}$ و $n=12$؛ اثبات نابرابری رادر حالت کلی، می‌توان شبیه استدلال مسألهٔ ۴.۴ انجام داد.)

ازاین نابرابری معلوم می‌شودکه، اگرزمان محاسبهٔ درصد راکوتاه‌تر ومیزان درصد رابه‌همان نسبت کمترکنیم، میزان مبلغ‌دریافتی بیشترمی‌شود. واین، به‌معنای‌آن است که دنبالهٔ

$$x_n=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$$

به‌ازای $a>0$، دنباله‌ای صعودی است. با وجود این، معلوم شده است که، باکوتاه‌کردن زمان محاسبهٔ درصد، نمی‌توان به‌سود خیلی بالایی رسید، زیرا این دنباله، با آن‌که صعودی است، محدود است و ازمرزمعینی تجاوز نمی‌کند. درواقع، حداین دنباله، برابراست با e^a. اگرمبلغ مربوط به‌مسألهٔ ۴.۴ را، به‌کمك ماشین حساب، محاسبه‌کنیم، در حالت اول به‌مبلغ ۱۶۲۹ ریال و درحالت دوم به مبلغ ۱۶۴۷ ریال می‌رسیم؛ و درحالت حدی: $1000\times e^{0/05}\approx 1649$.

مسألهٔ ۵.۴. پاسخ: درصد مسافرانی که دراتوبوس‌های پرنشسته‌اند، بیشترازدرصد اتوبوس‌های پراست.

تعداد اتوبوس‌های پر را k و تعداد اتوبوس‌هائی راکه پرنیستند، l فرض می‌کنیم. همچنین، تعداد مسافرانی راکه در اتوبوس‌های پر نشسته‌اند

برابر A و تعداد بقیهٔ مسافران را B فرض می‌کنیم. دراین صورت داریم:

$$\begin{cases} A > ۵۰k \\ B \leqslant ۵۰l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{A}{k} > ۵۰ \\ \frac{B}{l} \leqslant ۵۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{A}{k} > \frac{B}{l}$$

از نابرابری اخیر، نتیجه می‌شود:

$$\frac{B}{A} < \frac{l}{k} \ , \ \frac{A+B}{A} < \frac{l+k}{k}$$

از آن جا

$$۱۰۰ \times \frac{A}{A+B} > \frac{k}{l+k} \times ۱۰۰$$

که درآن، درسمت چپ، درصد مسافرانی‌که دراتوبوس‌های پرنشسته‌اند و، درسمت راست، درصد اتوبوس‌های پرقراردارد.

مسألهٔ ۶.۴. پاسخ: الف) ۷؛ ب) ۱۶.

تعداد شرکت کنندگان در انجمن ریاضی را n و تعداد پسرها را m می‌گیریم. با توجه به‌طبیعی بودن دو عدد m و n، باید حداقل مقدار n را طوری پیدا کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$$\frac{۲}{۵} < \frac{m}{n} < \frac{۱}{۲} \qquad (*)$$

اگرمقدار n را با آغاز از ۲، به‌ترتیب مورد آزمایش قرار دهیم، می‌بینیم که کسر $\frac{۳}{۷}$، نخستین کسری است که ضمن آزمایش به‌دست می‌آید و در شرط (*) صدق می‌کند. ۷، کوچکترین عددی است که برای n می‌توان درنظر گرفت.

∇ توجه کنیم که کسر $\frac{3}{7}$ را می‌توان از این راه به‌دست آورد: مخرج آن، مجموع مخرج‌ها و صورت آن، مجموع صورت‌های دو کسر $\frac{2}{5}$ و $\frac{1}{2}$ است.

برای هردو کسر مثبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ $\left(\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\right)$، کسر $\frac{a+c}{b+d}$، درنابرابری زیر صدق می‌کند:

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

ومعمولاً مقدارمیانی این کسرها نامیده می‌شود.

اگر کسرهای ساده نشدنی را، که مخرجی کوچکتر یا برابر n دارند، به‌ترتیب صعودی بنویسیم، به‌این جدول می‌رسیم:

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{5}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{2}{5}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{3}{5}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{4}{5}\quad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{5}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{2}{5}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{3}{5}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{4}{5}\quad\frac{5}{6}\quad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{7}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{5}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{2}{7}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{2}{5}\quad\frac{3}{7}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{4}{7}\quad\frac{3}{5}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{5}{7}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{4}{5}\quad\frac{5}{6}\quad\frac{6}{7}\quad\frac{1}{1}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

دراین جا، سطرnام را (که به رشتهٔ فاره‌ی معروف است)، می‌توان به‌کمك سطر ($n-$۱)ام، به‌این ترتیب پیدا کرد: درسطر ($n-$۱)ام، هردو کسر مجاور $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ راکه، درآن‌ها، مجموع مخرج‌ها برابرn است پیدا می‌کنیم و بین‌آن‌ها، کسرمیانی $\frac{a+c}{b+d}$ را می‌نویسیم. در ضمن، همهٔ کسرهای سطر ($n-$۱)ام هم، درجای خود، به‌کسرnام منتقل می‌شوند.

درمسألهٔ «الف»، درسطرهفتم ($n=$۷)، برای نخستین‌بار، به‌کسر $\frac{۳}{۷}$ برمی‌خوریم که بین $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۱}{۲}$ قرار دارد.

ولی درمسألهٔ «ب»، این‌آزمایش، به‌قدرکافی خسته‌کننده است. به‌این ترتیب، عمل می‌کنیم. باید جواب نابرابری‌های

$$\frac{۴۳}{۱۰۰}<\frac{m}{n}<\frac{۴۴}{۱۰۰}=\frac{۱۱}{۲۵} \qquad (۱)$$

را، برای‌کمترین مقدارطبیعی n پیدا کنیم.

کسرها را معکوس ومقداردرست‌آن‌ها را جدا می‌کنیم:

$$۲\frac{۱۴}{۴۳}>\frac{n}{m}>۲\frac{۳}{۱۱};$$

ازآن‌جا

$$\frac{۱۴}{۴۳}>\frac{n-۲m}{m}>\frac{۳}{۱۱} \qquad (۲)$$

دوباره، کسرها را معکوس می‌کنیم:

$$۳\frac{۱}{۱۴}<\frac{m}{n-۲m}<۳\frac{۲}{۳},$$

یعنی

$$\frac{1}{14}<\frac{m-3(n-2m)}{n-2m}=\frac{7m-3n}{n-2m}<\frac{2}{3} \qquad (3)$$

ویکبار دیگر

$$14>\frac{n-2m}{7m-3n}>\frac{3}{2} \qquad (4)$$

برای نخستین بار، درمرزهای نابرابری‌ها، عدددرست ظاهرمی‌شود. کوچکترین عدد درست بزرگتر از $\frac{3}{2}$، برابراست با ۲، و دستگاه معادله‌های

$$n-2m=2,\quad 7m-3n=1$$

درمجموعهٔ عددهای طبیعی، جواب دارد: $n=16$ و $m=7$.

ثابت‌می‌کنیم که، همین جواب، جواب‌مسأله‌است. ازنابرابری‌های (۲) تا (۴) نتیجه می‌شود:

$$n-2m>0,\quad 7m-3n\geqslant 1,\quad n-2m\geqslant 2$$

بنابراین

$$n=7(n-2m)+2(7m-3n)\geqslant 7\times 2+2\times 1=16$$

∇ اگرحل مسأله را تجزیه وتحلیل کنیم، معلوم می‌شود که، درواقع، کسرهای $\frac{43}{100}$ و $\frac{11}{25}$ را به کسرمسلسل تبدیل کرده‌ایم:

$$\frac{43}{100}=\frac{1}{2+\frac{14}{43}}=\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+13}}},$$

$$\frac{۱۱}{۲۵}=\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۳}{۱۱}}=\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲}}}}$$

سپس، بخش مشترک این کسرها را، درگامی انتخاب می‌کنیم که، در آن جا، تجزیه‌ها با هم اختلاف پیدا کرده‌اند: دریکی به‌عدد ۱۳ و دردیگری به‌عدد $\frac{۱}{۲}$ برخورد می‌کنیم. عدد ۱، کوچکترین عدد درستی است که بین $\frac{۱}{۲}$ و ۱۳ قرار دارد؛ همین عدد ۱ را به‌جای آن‌ها می‌گذاریم. سرانجام به‌دست می‌آید:

$$\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۱+۱}}}=\frac{۷}{۱۶}$$

این روش کلی، می‌تواند، کسر $\frac{m}{n}$ را با کوچکترین مخرج n، برای‌ما پیدا کند، به‌نحوی که درهرفاصلهٔ دلخواه $۰<\alpha<\frac{m}{n}<\beta$ قرار گرفته باشد.

مسألهٔ ۷۰۴ پاسخ: حداکثرفاصله‌ای کـه کامیون می‌تواند حرکت کند، برابر است با $۲۰۴۵۴\frac{۶}{۱۱}$ کیلومتر. لاستیک‌ها را باید طوری جابه‌جا کرد که، هرکدام ازآن‌ها، یك سوم راه را درجلو کامیون باشد.

کامیون ۶ لاستیك دارد (۲ لاستیك در جلو و ۴ لاستیك در عقب). بنابرشرط مسأله، از هرلاستیك جلویی $\frac{۱}{۱۵۰۰۰}$ و ازهرلاستیك عقبی $\frac{۱}{۲۵۰۰۰}$ فرسوده می‌شود. بنابراین درهرکیلومتر، روی هم به‌اندازهٔ

$$\frac{۲}{۱۵۰۰۰}+\frac{۴}{۲۵۰۰۰}=\frac{۱۱}{۳۷۵۰۰}$$

لاستیك فرسوده می‌شود (هر لاستیك را یك واحد به‌حساب می‌آوریم). فرض کنید، کامیون، x کیلومتر حرکت کرده باشد. دراین‌صورت $\frac{۱۱x}{۳۷۵۰۰}$ لاستیك خود را فرسوده کرده است. چون فقط ۶ لاستیك دارد، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{۱۱x}{۳۷۵۰۰} \leqslant ۶ \Rightarrow x \leqslant ۲۰۴۵۴\frac{۶}{۱۱}$$

برای این که کامیون بتوانـد تمامی این راه را طی کند، باید لاستیك‌ها را طوری جابه‌جا کرد که، هرکدام ازآن‌ها، یـك سوم این فاصله را در جلو کامیون باشند؛ در این صورت، همهٔ آن‌ها در پـایـان مسیر، باهم فرسوده می‌شوند.

مسألهٔ ۸۰۴. پاسخ: ۱۲ دقیقه.

روشن است، اگراین خواهروبرادربخواهند صبحانه را درحداقل زمان ممکن بخورند، بایدآغاز وپایان صرف صبحانه، برای هردونفر، یکی باشد، در غیرایـن صورت، یکی ازآن‌ها می‌تواند به‌دیگری کمك کند و زمان صرف صبحانه را کوتاه‌تر کند.

بخشی ازنان شیرینی، نان و پنیر و شیر راکـه خواهرصرف می‌کند، به‌ترتیب x، y و z می‌نامیم، دراین صورت، سهمی که نصیب برادرمی‌شود، به ترتیب، برابر $(۱-x)$، $(۱-y)$ و $(۱-z)$ و، در ضمن، زمان صرف صبحانه، برای هردو یکی است:

$$t = ۱۰x + ۱۳y + ۱۴z = ۶(۱-x) + ۶(۱-y) + ۷(۱-z)$$

به‌این‌ترتیب، بایدحداقل‌زمان $t = ۱۰x + ۱۳y + ۱۴z$ را، به‌شرطی پیدا کنیم که برای x و y و z داشته باشیم:

$$۰ \leqslant x \leqslant ۱،\quad ۰ \leqslant y \leqslant ۱،\quad ۰ \leqslant z \leqslant ۱،$$

$$۱۰x + ۱۳y + ۱۴z = ۶(۱-x) + ۶(۱-y) + ۷(۱-z)$$

در رابطهٔ اخیر، z را برحسب x و y محاسبه می‌کنیم:

$$z=\frac{۱}{۲۱}(۱۹-۱۶x-۱۹y)$$

که اگرآن را، در رابطه‌ای که t را می‌دهد، قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$t=-\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۳}y+\frac{۳۸}{۳}$$

دیده می‌شودکه هرچه x بزرگتر و y کوچکتر باشد، مقدار t کمتر می‌شود. حداکثرمقدارممکن را برای x و حداقل مقدارممکن را برای y انتخاب می‌کنیم: $x=۱$، $y=۰$. دراین صورت $t=۱۲$ و $z=\frac{۱}{۷}$ می‌شود.

بنابراین، وقتی صرف صبحانه در حداقل زمان ممکن تمام می‌شود که دخترك تمام نان شیرینی و $\frac{۱}{۷}$ لیوان شیر، و برادرش تمام نان و پنیر و $\frac{۶}{۷}$ لیوان شیر را بخورند.

▽ مسألهٔ ۸.۴ را به‌یك مسألهٔ «برنامه‌ریزی خطی» منجرکردیم: پیدا کردن می‌نیمم یك تابع‌خطی، بااین‌شرط که متغیرها غیرمنفی‌اند ودردستگاهی از نامعادله‌ها و معادله‌ها صدق می‌کنند.

اگربخواهیم چنین مسأله‌ای را، برای $n>۳$ متغیر حل کنیم، روش بالامنجربه محاسبه‌های طولانی و خسته‌کننده می‌شود، ولی می‌توان قاعدهٔ کلی ساده‌ای‌آورد که طرح مناسب را برای بهترین توزیع متغیرها به دست دهد.

فرض می‌کنیم، دخترك، خوراکی iام را در زمان a_i و برادرش‌همین خوراکی را درزمان b_i صرف‌کند. درضمن فرض‌کنیم، خوراکی‌ها را به‌ردیف صعودی، برحسب نسبت این زمان‌ها، شماره‌گذاری‌کرده باشیم:

$$\frac{a_۱}{b_۱}\leqslant\frac{a_۲}{b_۲}\leqslant\dots\leqslant\frac{a_n}{b_n} \qquad (۱)$$

طرح مطلوب، برای این‌که صرف صبحانه درحداقل زمان انجام شود، به‌صورت زیراست: دختراز نخستین خوراکی آغازمی‌کند و به‌ردیف درجهت شمارهٔ خوراکی‌ها جلو می‌رود؛ برادرش از خوراکی‌آخر آغاز بـه خوردن می‌کند و درجهت عکس شمارهٔ خوراکی‌ها جلومی‌رود.

درمسألهٔ ما، این ردیف بـرای خوراکی‌ها برقـرار می‌شود: اول نان شیرینی، دوم شیر، سوم نان و پنیر. در این صورت، نسبت زمان‌ها، در نابرابری‌های

$$\frac{۱۰}{۶}\leqslant\frac{۱۴}{۷}\leqslant\frac{۱۳}{۶}$$

صدق می‌کنند. در۶ دقیقهٔ اول، پسرنان و پنیر را و دختربخشی از شیرینی را می‌خورند. در۴ دقیقهٔ بعد، دخترشیرینی را تمام می‌کند و پسر $\frac{۴}{۷}$ شیر را می‌خورد. بالاخره، در۲ دقیقهٔ آخر، بقیهٔ شیر راباهم می‌خورند، که درنتیجه، $\frac{۱}{۷}$ شیر نصیب دختر و $\frac{۶}{۷}$ آن، نصیب پسرمی‌شود.

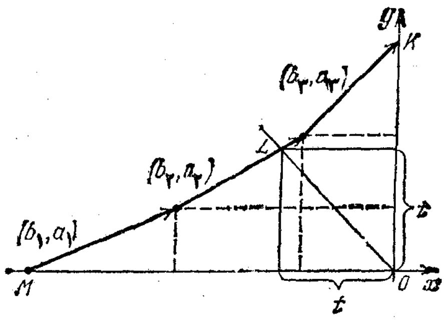
برای اثبات درستی این طرح، فرض می‌کنیم، میزان انرژی خوراکی iام برابر (a_i+b_i) کالـری باشد؛ درایـن صورت، سرعت صرف (در واحد زمان) iامین خوراکی، برای دختربرابر $\frac{a_i+b_i}{a_i}=۱+\frac{b_i}{a_i}$ و بـرای پسر برابـر $\frac{a_i+b_i}{b_i}=۱+\frac{a_i}{b_i}$ می‌شود. می‌بینیم که هرچه $\frac{a_i}{b_i}$ کمترباشد، سرعت دختربیشتر و سرعت پسر کمتراست.

به‌این ترتیب، برای این‌که، درطول زمان t، بتوان حداکثرکالری را مصرف کرد، باید دختر، در ردیف شماره‌ها و پسر در ردیف عکس شماره‌ها، به‌خوردن‌خوراکی‌ها مشغول شوند. فرض کنید، دختروپسر، در زمان t، همهٔ

$$(a_۱+b_۱)+(a_۲+b_۲)+\dots+(a_n+b_n)$$

کالری را به‌دست‌آورده باشند؛ آن وقت، با هرطرح دیگری، در همین مدت زمان t، کالری کمتری به دست می‌آورند، یعنی نمی‌توانند همهٔ خوراکی‌ها را مصرف‌کنند.

می‌توان این فرایند را به کمک نمودار نشان داد. در ربع دوم صفحهٔ مختصاتی Oxy، خط‌شکسته‌ای‌را رسم می‌کنیم‌که حلقه‌های‌آن را، بردارهای با مختصات (b_1, a_1)، (b_2, a_2)، ...، (b_n, a_n)، به‌ردیفی‌که نابرابری‌های (۱) مشخص می‌کنند، تشکیل‌دهند؛ نقطهٔ M، ابتدای این خط‌شکسته روی محور Ox و نقطهٔ K، انتهای آن، روی محور Oy است (در شکل ۴۶، حالت $n=۳$ نشان‌داده‌شده‌است؛ درمسألهٔ ۴.۸، سه برداری که‌خط‌شکسته‌را تشکیل می‌دهند، دارای مختصات (۶،۱۰)، (۷،۱۴) و(۶،۱۳) هستند). نقطهٔ L، محل برخورد این خط شکسته را با خط راست $x+y=0$ (نیمساز ربع دوم دستگاه مختصات) درنظرمی‌گیریم. عرض نقطهٔ L، یعنی t، معرف حداقل زمان است؛ درضمن، بخش ML ازخط شکسته، معرف خوراکی‌هایی است‌که دختر خورده است وبخش LK معرف خوراکی‌هایی که پسر خورده است.



شکل ۴۶

مسألهٔ ۹.۴. پاسخ: ۱۰ یا ۱۱ قطار.

فرض‌کنید قطارها، با فاصلهٔ زمانی T دقیقه به T دقیقه، عبور کنند.

در ۱۲ دقیقه، ۵قطار گذشته است که ۴ فاصلهٔ زمانی را تشکیل می‌دهند، یعنی

$$۴T \leqslant ۱۲ \Rightarrow T \leqslant ۳$$

چون زمان لازم برای رسیدن نخستین قطار (ازاین ۵ قطار) و زمان بعد از عبور آخرین قطار، بیش از T دقیقه نیست، بنابراین

$$T + ۴T + T > ۱۲ \Rightarrow T > ۲$$

به‌این ترتیب $۲ < T \leqslant ۳$.

به‌همین ترتیب، ازاین حقیقت که، در ۲۰ دقیقه ۶قطارعبور کرده است، می‌توان نتیجه گرفت: $\frac{۲۰}{۷} < T \leqslant ۴$. ازاین دونابرابری، به‌دست می‌آید:

$$۲\frac{۶}{۷} < T \leqslant ۳$$

فرض کنیم، در ۳۰ دقیقه، n قطارعبور کرده باشد، دراین صورت، با استدلالی شبیه استدلال بالا نتیجه می‌شود:

$$(n-۱)T \leqslant ۳۰ < (n+۱)T \Rightarrow \frac{۳۰}{T} - ۱ < n \leqslant \frac{۳۰}{T} + ۱$$

که اگر نابرابری‌های $۲\frac{۶}{۷} < T \leqslant ۳$ را به‌حساب‌آوریم، به‌دست می‌آید:

$$۹ < n \leqslant ۱۱ \Rightarrow n = ۱۰ \text{ یا } n = ۱۱$$

اگر $T = ۳$ باشد و نخستین قطار، بلافاصله بعد ازآمدن بهروز به‌ایستگاه عبور کند، آن‌وقت، در ۳۰ دقیقه، ۱۱ قطارمی گذرد؛ ولی اگربرای $T = ۳$، نخستین قطار، یك دقیقه بعد از ورود بهروزعبور کند، آن وقت‌در ۳۰ دقیقه، تنها ۱۰ قطارعبورخواهدکرد. به‌این‌ترتیب، هریك ازدوحالت، ممکن است پیش آید.

∇ این مسأله را می‌توان حالت خاصی، ازمسألهٔ کلی‌تر زیردانست: روی یك خط راست، نقطه‌هایی را علامت گذاشته‌ایم، به نحوی که

فاصلهٔ هردو نقطهٔ مجاور، برابر T است. مطلوب است محاسبهٔ n، تعداد نقطه‌هایی که روی پاره‌خطی به‌طول b قراردارند.

پاسخ: $\frac{b}{T}-1<n\leqslant\frac{b}{T}+1$.

مسألهٔ ۱۰۰۴. پاسخ: ۵ کامیون سه تنی.

ابتدا ثابت می‌کنیم که ۴ کامیون، ممکن است کافی نباشد. ۱۳ صندوق یکسان درنظرمی‌گیریم که وزن هرکدام ازآن‌ها، $\frac{10}{13}$ تـن بـاشد. در ایـن صورت، درهـر کامیون، بیش از ۳ صندوق و در ۴ کامیون، بیش از ۱۲ صندوق نمی‌توان قرارداد. یك صندوق باقی می‌ماند.

اکنون ثابت می‌کنیم که ۵ کامیون، همیشه کافی است. در واقع، بارهر کامیون، از ۲ تن کمترنیست (اگربارکامیون از ۲ تن کمترباشد، می‌توانیم یك صندوق دیگر، که وزنی کمترازیـك تن دارد، بـه‌آن اضافه‌کنیم). بنابراین، بار ۵ کامیون، از ۱۰ تن کمترنمی‌شود.

∇ مسأله‌ای کلی‌تـر. چند صندوق، روی هم به وزن T تن داریم که وزن هیچ‌کدام ازآن‌ها ازیك تـن تجاوزنمی‌کند. حداقل چندکامیون p تنی $(p>1)$ لازم است تا بتوانیم همهٔ صندوق‌ها را، با آن‌ها حمل کنیم؟

$\gamma=\frac{p}{[p]+1}$ می‌گیریم که، درآن، $[p]$ عبارت است ازبخش درست عدد p. دراین صورت، جواب عبارت است ازکوچکترین عدد درست N، که بزرگتریا برابربا $\frac{T-\gamma}{p-\gamma}$ باشد.

با مثال می‌توان نشان دادکـه، تعدادکمتر کامیون، ممکن است کافی نباشد. برای این‌منظور، همهٔ صندوق‌ها راهم وزن (وبا وزنی اندکی بیشتر از γ) می‌گیریم.

برای اثبات‌کافی بودن N کامیون، بهتراست ازپیش قضیهٔ زیراستفاده کنیم: اگـر چند جعبه داشته باشیم‌که روی هم، بیش از p تن وزن داشته

باشند (و وزن هرکدام ازآن‌ها، بیش ازیك تن نباشد)، آن وقت می‌توان در هرکامیون p تنی، بیش از $p-\gamma$ تن بارکرد.

درمسألهٔ ۱۰.۴ داریم: $p=۳$، $T=۱۰$ و $\gamma=\frac{۳}{۴}$. از پیش قضیه نتیجه می‌شود که در هرکامیون سه‌تنی می‌توان بیش از $۲\frac{۱}{۴}$ تـن قـرارداد؛ همهٔ بارها ۱۰ تن وزن دارند و، همان طورکه می‌دانیم، می‌توان‌آن‌ها را با ۵ کامیون حمل‌کرد؛ و این، کوچکترین عدد درستی است‌که بزرگتر یابرابر باشد با

$$\frac{T-\gamma}{p-\gamma}=\frac{۳۷}{۹}$$

برای علاقه‌مندان. جالب است‌که این مسأله را، با «مسألهٔ سنگ‌ها»، که اغلب‌وبه‌صورت‌های مختلف‌کاربرد دارد، مقایسه‌کنیم. «مسألهٔ سنگ‌ها» چنین است:

چند سنگ با وزن‌های معلوم $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n وکامیونی با ظرفیت p تن دراختیارداریم ($a_۱$، $a_۲$، ...، a_n و p، عددهایی طبیعی‌اند). آیا می‌توان از بین این سنگ‌ها، چند سنگ طوری انتخاب کرد که روی هم p تن وزن داشته باشند؟ به‌زبان دیگر، آیا عددهای $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n را، برابر صفر یا واحد، می‌توان پیداکرد، به‌نحوی‌که برابری

$$a_۱x_۱+a_۲x_۲+\dots+a_nx_n=p$$

برقرارباشد؟

این مسأله، به گروه به اصطلاح «مسأله‌های جداسازی» تعلق دارد که، هنوز، برای حل‌آن‌ها، روش عام و ساده‌ای پیدا نشده است.

مسألهٔ ۱۱.۴. پاسخ: یا هرسه عدد برابرصفرند، یا یکی ازآن‌ها برابر صفر و دوتای دیگربرابر واحدند.

توجه می‌کنیم‌که، هرسه عدد، غیرمنفی‌انـد، زیرا هرکدام از آن‌ها،

مجذور کامل‌اند. سه عدد را x و y و z می‌گیریم و فرض می‌کنیم $x \geqslant y \geqslant z \geqslant ۰$. دراین صورت

$$x-z \geqslant y-z \geqslant ۰ \Rightarrow (x-z)^۲ \geqslant (y-z)^۲$$

ازطرف دیگر $y=(x-z)^۲$ و $x=(y-z)^۲$. به‌این ترتیب، ازیك طرف، بنابر فرض $y \geqslant x$ وازطرف‌دیگر $x \geqslant y$؛ یعنی $y=x$. دراین‌حالت، به‌دست می‌آید: $z=۰$ و $x^۲=x$، یعنی $x=۰$ یا $x=۱$.

∇ درصورت مسأله، صحبتی ازنابرابری نبود، ولی درحل مسأله، از نابرابری‌ها استفاده کردیم. اندیشهٔ ردیف کردن مجهول‌ها (به صورت نزولی یا به‌صورت صعودی)، کارحل را، دربسیاری ازمسأله‌ها، ساده می‌کند.

مسألهٔ ۱۲.۴. بدون این که به‌کلی بودن مسأله، لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد: $m \geqslant n \geqslant ۲$. دراین صورت $\sqrt[m]{n} \leqslant \sqrt[n]{n}$. بنابراین، کافی است ثابت‌کنیم $\sqrt[n]{n} \leqslant \sqrt[۳]{۳}$ و یا

$$n^{\frac{۱}{n}} \leqslant ۳^{\frac{۱}{۳}} \qquad (۱)$$

نابرابری (۱) به‌ازای $n=۲$ درست است، زیرا اگردوطرف نابرابری $۲^{\frac{۱}{۲}} \leqslant ۳^{\frac{۱}{۳}}$ را به‌توان ۶ برسانیم، به‌نابرابری روشن $۹>۸$ می‌رسیم.

اکنون از دو طرف رابطهٔ (۱)، لگاریتم طبیعی می‌گیریم و ثابت می‌کنیم‌که، برای $n \geqslant ۳$، داریم: $\frac{\ln n}{n} \leqslant \frac{\ln ۳}{۳}$.

مشتق تابع $\frac{\ln x}{x}$، به‌ازای $x \geqslant ۳$، منفی است:

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{۱-\ln x}{x^۲} < ۰$$

زیرا به‌ازای $x \geqslant ۳ > e$، داریم: $\ln x > ۱$.

ازاین جا نتیجه می‌شود که، تابع $\frac{\ln x}{x}$، برای $x \geqslant ۳$ نزولی است و بنابراین $\frac{۱}{x}\ln x \leqslant \frac{۱}{۳}\ln ۳$ $(x \geqslant ۳)$.

∇ نابرابری $n^۳ \leqslant ۳^n$ را، برای عددهای طبیعی $n \geqslant ۳$، می‌توان به کمك استقرا هم ثابت کرد. ثابت‌می‌کنیم، اگراین نابرابری، برای $n = k$ درست باشد، برای $n = k+۱$ هم‌درست است. در واقع، می‌توان نابرابری $(k+۱)^۳ \leqslant ۳^{k+۱}$ را ازنابرابری $k^۳ \leqslant ۳^k$، با ضرب‌آن درنابرابری درست $\left(۱+\frac{۱}{k}\right)^۳ \leqslant ۳$ (به‌ازای $k \geqslant ۳$) به‌دست‌آورد.

مسألهٔ ۱۳۰۴. پاسخ: حداقل‌مقدار، به‌ازای $n = ۱۰^{۱۰} - ۱$ یابه‌ازای $n = ۱۰^{۱۰}$ به‌دست می‌آید.

فرض می‌کنیم:

$$a_n = \frac{\log ۲ . \log ۳ \ldots \log n}{۱۰^n}$$

و توجه می‌کنیم که

$$a_n = \frac{\log n}{۱۰} \cdot a_{n-۱}$$

از برابری اخیر دیده می‌شود که:

اگر $\log n < ۱۰$، آن وقت $a_n < a_{n-۱}$؛

اگر $\log n = ۱۰$، آن وقت $a_n = a_{n-۱}$؛

اگر $\log n > ۱۰$، آن وقت $a_n > a_{n-۱}$.

به‌این‌ترتیب، دنبالهٔ (a_n) تا $n = ۱۰^{۱۰} - ۱$ نزولی‌است، سپس دو جملهٔ برابر باشماره‌های $۱۰^{۱۰} - ۱$ و $۱۰^{۱۰}$ دارد و، باآغاز ازجملهٔ بعد، صعودی‌می‌شود.

مسألهٔ ۱۴۰۴. پاسخ: حداکثرمقدار، برابر $\frac{۱}{۴}$ است؛ واین مقدار، مثلاً برای $x_۱ = x_۲ = \frac{۱}{۲}$ و $x_۳ = x_۴ = x_۵ = ۰$ به‌دست می‌آید.

ثابت می‌کنیم، به‌ازای‌همهٔ‌مقدارهای غیرمنفی $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ و $x_۵$،

نابرابری $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5\leqslant\frac{1}{4}$ برقراراست. در واقع

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5\leqslant(x_1+x_3+x_5)(x_2+x_4)$$

زیرا، درسمت راست نابرابری، همهٔ جمله‌های سمت چپ وجود دارد و، به‌جزآن، چند جملهٔ غیرمنفی اضافی هم وارد شده است.

اکنون اگرفرض کنیم:

$$u=x_1+x_3+x_5\geqslant 0\quad,\quad v=x_2+x_4\geqslant 0$$

بنا به‌فرض مسأله داریم $u+v=1$. از طرف دیگر، با توجه به‌نابرابری واسطه‌ها، برای دوعدد غیرمنفی u و v داریم:

$$uv\leqslant\frac{(u+v)^2}{4}\quad \text{یا}\quad \sqrt{uv}\leqslant\frac{u+v}{2}$$

به‌این ترتیب

$$(x_1+x_3+x_5)(x_2+x_4)=uv\leqslant\frac{(u+v)^2}{4}=\frac{1}{4}$$

▽ به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که، برای n عدد غیرمنفی x_1، x_2، ...، x_n با مجموعی برابرواحد، حداکثرمقدار عبارت

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}+x_{n-1}x_n$$

برابر است با $\frac{1}{4}$.

مسألهٔ ۱۵۰۴. برای‌اثبات نابرابری، سمت‌چپ وسمت راست‌آن را، با عبارت $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2$ مقایسه می‌کنیم. ثابت می‌کنیم:

$$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\geqslant a^2bc+b^2ac+c^2ab$$

سه نابرابری روشن زیر را درنظر می‌گیریم:

$$a^4+b^4\geqslant 2a^2b^2,\ b^4+c^4\geqslant 2b^2c^2,\ c^4+a^4\geqslant 2a^2c^2$$

ازمجموع این سه‌نابرابری، به‌دست می‌آید:

$$2(a^4+b^4+c^4)\geqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$$

اکنون، این سه‌نابرابری روشن را درنظرمی‌گیریم:

$$a^{2}(b^{2}+c^{2}-2bc)\geqslant 0,\quad b^{2}(a^{2}+c^{2}-2ac)\geqslant 0,$$
$$c^{2}(b^{2}+a^{2}-2ba)\geqslant 0$$

ازمجموع آن‌ها به‌دست می‌آید،

$$2(a^{2}b^{2}+b^{2}c^{2}+a^{2}c^{2})\geqslant 2(a^{2}bc+b^{2}ac+c^{2}ab)$$

∇ قضیهٔ کلی زیر (که به‌قضیهٔ مورهد معروف است)، به‌نابرابری مسألهٔ ۱۵.۴ مربوط می‌شود.

جملهٔ $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ از n متغیر x_1، x_2، ...، x_n مفروض است. چند جمله‌ای را که برابر با واسطهٔ حسابی همهٔ جمله‌های ممکن حاصل از جایگشت‌های متغیرها درجملهٔ مفروض باشد، $\Phi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ می‌نامیم. مثلاً

$$\Phi_{2,2,0}(x,y,z)=\frac{1}{3}(x^{2}y^{2}+y^{2}z^{2}+z^{2}x^{2})$$

دوانتخاب $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ و $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ از نماهای

$$\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n\geqslant 0 \text{ و } \beta_1\geqslant\beta_2\geqslant\ldots\geqslant\beta_n\geqslant 0$$

را درنظرمی‌گیریم. برای این‌که، به‌ازای همهٔ مقدارهای غیرمنفی x_1، x_2، ...، x_n، نابرابری

$$\Phi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}\geqslant\Phi_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}$$

برقرارباشد، لازم وکافی است که انتخاب α، نسبت به‌انتخاب β، باشرطهای زیرسازگارباشد:

$$\alpha_1\geqslant\beta_1,$$
$$\alpha_1+\alpha_2\geqslant\beta_1+\beta_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}\geqslant\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{n-1}$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$$

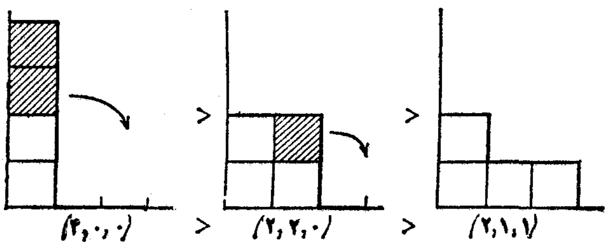
این دستگاه شرطها را، به‌طورخلاصه، این طورمی‌نویسند:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)>(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$$

این شرط را می‌توان به صورتی عینی، تعبیر کرد: اگر انتخاب نماها را به‌صورت پلکانی نشان دهیم که درآن، عرض پله برابر واحد و ارتفاع آن، عددانتخابی باشد، آن وقت درانتخاب دوم باید قطعه‌هایی ازپلهٔ اول را جدا کرد وآن‌ها را درسمت راست وپایین (روی یکی ازپله‌های بعدی) قرارداد. درمسألهٔ ۱۵.۴ (شکل ۴۷)، از انتخاب (۴،۰،۰)، انتخاب (۲،۲،۰) و سپس ازآن، انتخاب (۲،۱،۱) به‌دست‌آمده است:

$$(۴,۰,۰)>(۲,۲,۰)>(۲,۱,۱)$$

عمل «جداکردن قطعه‌هایی ازپلکان»، روش اثبات همهٔ نابرابری‌های قضیهٔ مورهد را تلقین می‌کند.



شکل ۴۷

شکل‌های شامل خانه‌ها و، به‌شکل پلکان، در بسیاری ازمسأله‌های مربوط به‌ترکیب‌ها و جبر، کار را ساده می‌کنند (مسألهٔ ۱۰.۶ را ببینید).

مسألهٔ ۱۶.۴. اگرفرض کنیم:

$$x=b^{\frac{1}{۱۵}}\ ,\ y=a^{\frac{1}{۱۰}}$$

آن وقت، نابرابری مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$3x^5 = 2y^5 - 5x^3y^2 \geqslant 0$$

و به این ترتیب، از وجود رادیکال‌ها آزاد می‌شویم. اگردوطرف نابرابری اخیر را بر y^5 تقسیم‌کنیم و $\frac{x}{y}$ را t بنامیم، به‌نابرابری زیرکه هم‌ارزآن است، می‌رسیم:

$$3t^5 - 5t^3 + 2 \geqslant 0$$

سمت چپ این نابرابری را می‌توان تجزیه کرد:

$$(t-1)^2(3t^3+6t^2+4t+2) \geqslant 0$$

با توجه به فرض مثبت بودن a و b، داریم: $t > 0$ و، بنابراین، درستی نابرابری روشن است. نابرابری وقتی به برابری تبدیل می‌شودکه داشته باشیم: $t = 1$، یعنی $a^3 = b^2$.

▽ نابرابری را می‌توان با استفاده از «نابرابری واسطه‌ها» ثابت کرد. داریم:

$$\frac{1}{5}(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt{a}+\sqrt{a}) \geqslant \sqrt[5]{(\sqrt[3]{b})^3.(\sqrt{a})^2} = \sqrt[5]{ab}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کردکه، برای k عدد مثبت a_1، a_2، ...، a_k و kعدد طبیعی p_1، p_2، ...، p_k، با شرط $p_1+\ldots+p_k = p$، داریم:

$$p_1a_1^{\frac{1}{p_1}} + p_2a_2^{\frac{1}{p_2}} + \ldots + p_ka_k^{\frac{1}{p_k}} \geqslant p(a_1a_2\ldots a_k)^{\frac{1}{p}}$$

اثبات دیگری هم برای این نابرابری می‌آوریم. $a = y^5$ و $b = x^5$ می‌گیریم، وبه‌این نابرابری می‌رسیم:

$$\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{2}{5}\sqrt{y^5} \geqslant xy$$

واین، حالت خاصی ازنابرابری یونگ است: برای عددهای مثبت ودلخواه x، y، α و β، با شرط $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$، داریم:

$$\frac{x^{\alpha}}{\alpha}+\frac{y^{\beta}}{\beta}\geqslant xy$$

این نابرابری هم، به‌نوبهٔ خود، حالت خاصی ازنابرابری زیراست:

$$f(x)+g(y)\geqslant xy \qquad (*)$$

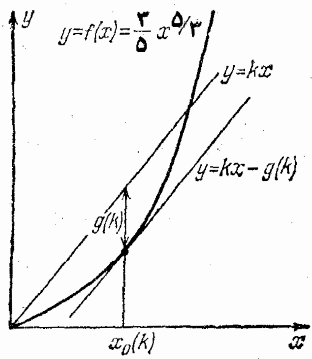
که درآن، f و g، تابع‌هایی مشتق‌پذیر و برای همهٔ مقدارهای غیرمنفی آوند، معین‌اند؛ در ضمن f' و g' تابع‌های یکنوای صعودی و معکوس یکدیگرند و

$$f(0)=g(0)=f'(0)=g'(0)=0$$

(f و g را، دوقلوهای یونگ می‌گویند).

برای هر مقدار y، درست یک مقدار x وجود داردکه، به‌ازای آن‌ها، نابرابری $(*)$ به‌برابری تبدیل می‌شود؛ برای این مقدارها داریم: $y=f'(x)$ و $x=g'(y)$. به این دلیل، تابع g را می‌توان به کمک تابع f تعریف کرد: برای هر k داریم:

$$g(k)=\max_{x}\left(kx-f(x)\right)$$

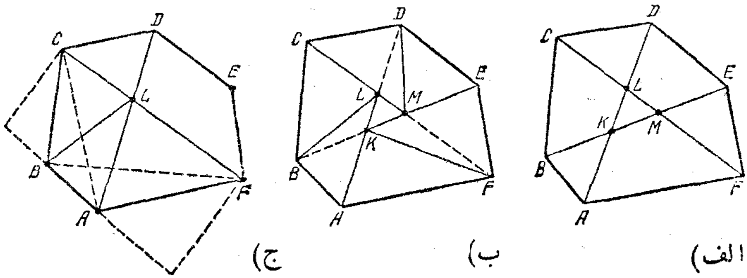


شکل ۴۸

این عبور ازتابع f به‌تابع g را، تبدیل لژاندرتابع f می‌نامند. درضمن، تابع f هم، یك تبدیل لژاندر ازتابع g است (شکل ۴۸ را ببینید).

مسألهٔ ۱۷.۴. سه قطر AD، BE و CF ازشش ضلعی $ABCDEF$ را (که هر رأس را به‌رأس مقابل وصل می‌کنند) رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم،

این قطرها، یکدیگر را در نقطه‌های K، L و M قطع کرده باشند (شکل «۴۹ ـ الف»)؛ درحالت‌خاص، ممکن‌است نقطه‌های K، L و M برهم منطبق باشند. شش مثلثی‌را درنظرمی‌گیریم که، همراه با مثلث KLM، شش ضلعی $ABCDEF$ را تشکیل می‌دهند. روی شکل ۴۹، این مثلث‌ها عبارتند از ABL، BCL، CDM، DEM، EFK و FAK (شکل «۴۹ـب»). اگر مساحت شش ضلعی را S بنامیم، دست‌کم مساحت یکی ازاین مثلث‌ها از



شکل ۴۹

$\frac{1}{6}S$ کمتراست (درغیراین صورت، مجموع مساحت‌های این شش مثلث از S بیشترمی‌شود، که ممکن نیست). مثلاً فرض کنید $S_{ABL} \leqslant \frac{1}{6}S$ (شکل «۴۹ ـ ج»). ثابت می کنیم که، دراین‌صورت، مساحت‌یکی ازمثلث‌های ABC و ABF (با قاعدهٔ مشترك AB)، از $\frac{1}{6}S$ تجاوزنمی کند. در واقع، مساحت مثلث با قاعدهٔ AB و ارتفاع h برابر است با $\frac{1}{2}AB \times h$؛ ارتفاع مثلث ABL، بین ارتفاع‌های دومثلث ABC و ABF قراردارد، یعنی از هردوی آن‌ها نمی‌تواندکوچکترباشد.

∇ دراستدلال پایان حل‌مسأله، می‌توان به‌نکته‌ای برخوردکه اغلب

با آن روبه‌رومی‌شویم: حداکثرمقدارتابع خطی $f(x)$، که در بازهٔ مفروض $[a,b]$ داده شده است، همیشه دریکی ازدوانتهای بازه ظاهر می‌شود، یعنی مقدار $f(x)$، به‌ازای‌هرمقدارx، از $f(a)$ یا $f(b)$ تجاوزنمی‌کند. درمسألهٔ ما، این‌تابع، عبارت‌است ازمساحت مثلث $f(h)=\frac{۱}{۲}AB\times h$.

مسأله ۱۸۰۴. $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$ می‌گیریم. α و β را ثابت می‌گیریم، در این صورت، اگراز تفاضل سمت چپ ازسمت راست نابرابری، نسبت به γ مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\left(۳\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳}-\sin\gamma\right)'=\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳}-\cos\gamma\geqslant ۰$$

زیرا $\pi\leqslant\gamma\leqslant\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳}\leqslant ۰$، وبرای $t\in[۰,\pi]$، تابع $y=\cos t$ نزولی است (مشتق مقدارهای‌ثابت $\sin\alpha$ و$\sin\beta$ برابرصفراست). اگرثابت کنیم، نابرابری مورد نظربه‌ازای $\beta=\gamma$ درست است، آن وقت برای $\beta\leqslant\gamma$ هم درست خواهد بود، زیرا با ترقی γ، اختلاف سمت چپ و سمت راست نابرابری ترقی می‌کند.

به‌این‌ترتیب، کافی است ثابت کنیم، برای هر α و β $(\alpha\leqslant\beta)$ داریم:

$$\sin\alpha+۲\sin\beta\leqslant ۳\sin\frac{\alpha+۲\beta}{۳}$$

با تکرارهمین استدلال، اگراز تفاضل دوطرف نسبت به β مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$۲\cos\left(\frac{\alpha+۲\beta}{۳}\right)-۲\cos\beta\geqslant ۰$$

زیرا $\pi\leqslant\beta\leqslant\frac{\alpha+۲\beta}{۳}\leqslant ۰$. ولی به‌ازای $\alpha=\beta$، نابرابری‌به‌برابری تبدیل می‌شود. بنابراین، برای $\alpha\leqslant\beta$ درست است.

▽ اگرشرط $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ یا $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ را به‌مسأله‌اضافه کنیم، به‌نابرابری‌هایی می‌رسیم که با گزارهٔ زیرهم ارزند: اگرمثلث‌هایی را درنظربگیریم که دریك دایره محاط شده‌انـد، آن وقت، محیط ومساحت هر مثلثی، ازمحیط ومساحت مثلث متساوی‌الاضلاع محاط درهمان دایره، تجاوز نمی‌کند.

روشی‌که برای حل ایـن مسأله مورد استفاده قـرار گرفت، می‌تواند برای قضیهٔ کلی زیـر به‌کار رود. فـرض می‌کنیم، تابع $f(x)$ که دربارهٔ $[a,b]$ معین است، چنان باشدکه مشتق‌آن، $f'(x)$، غیرصعودی باشد (در مورد چنین تابعی می‌گویند که تحدبی به طرف بالا دارد). در این صورت، برای هر n نقطهٔ x_1، x_2، ...، x_n ازاین‌بازه‌وهر n عدد مثبت p_1، p_2، ...، p_n، به‌شرطی‌که مجموعی برابر واحدداشته باشند، نابرابری زیر (که به‌نابرابری ین‌سن معروف است) وجود دارد:

$$f(p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n)\geqslant p_1f(x_1)+\ldots+p_nf(x_n)$$

مسألهٔ ما، حالت خاصی ازاین قضیه است و درآن

$$f(x)=\sin x,\ x\in[0,\pi],\ p_1=p_2=p_3=\frac{1}{3}$$

اگر فرض کنیم: $f(x)=\ln x$ و $p_1=p_2=\ldots=p_n=\frac{1}{n}$ ، آن وقت به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$\ln\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant\frac{\ln x_1+\ldots+\ln x_n}{n}$$

و یا

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$$

که‌همان نابرابری معروف بین واسطهٔ عددی و واسطهٔ هندسی n عدد مثبت است.

برای تابع $f(x)=-x^2$، به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$(p_1x_1+\dots+p_nx_n)^2\leqslant p_1x_1^2+\dots+p_nx_n^2$$

که اگردرآن فرض کنیم:

$$x_k=\frac{a_k}{b_k},\ p_k=\frac{b_k^2}{b_1^2+\dots+b_n^2}$$

آن وقت، می‌توان نابرابری کوشی - بوینا کووسکی را نتیجه گرفت:

$$a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}\ .\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2}$$

که بنابر آن، حاصل‌ضرب داخلی دو بردار، از حاصل‌ضرب طول‌های آن‌ها، تجاوز نمی‌کند (دراثبات ما، مهم بود که همهٔ b_kها مخالف صفر باشند، ولی روشن است که نابرابری اخیر، بدون این شرط هم درست است).

مسألهٔ ۱۹۰۴. پاسخ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. (این مساحت متعلق به‌ذوزنقه‌ای است که طول قاعدهٔ کوچکتر وهریک ازساق‌های آن برابر ۱ و طول قاعدهٔ بزرگ آن برابر ۲ باشد.)

فرض کنید درچهارضلعی $ABCD$ (که البته می‌توان‌آن را محدب در نظر گرفت) داشته باشیم: $AB=BC=CD=1$. وسط ضلع AD را K می‌نامیم (شکل ۵۰). اگر $DB'C'A$، قرینهٔ خط شکستهٔ $ABCD$ را نسبت به نقطهٔ K پیدا کنیم، یك شش ضلعی با مرکزتقارن K به‌دست می‌آیدکه، طول هریك ازضلع‌های آن، برابر واحد است. این شش ضلعی را می‌توان به سه لوزی $ABCO$، $CDB'O$ و $B'C'AO$ تقسیم کرد؛ درضمن مساحت این شش‌ضلعی برابرمی‌شود با $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ که، درآن، α، β و γ عبارتند از زاویه‌های بین پاره‌خط‌های راست OA، OC و OB' که مجموعی برابر 2π دارند. با توجه به‌مسألهٔ قبل، این‌مساحت نمی‌تواند از $3\sin\frac{2\pi}{3}$،

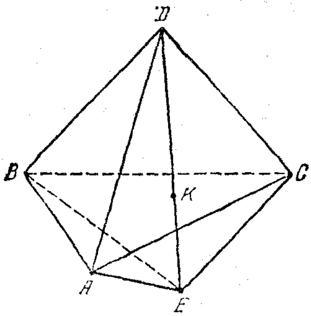
یعنی $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ تجاوز کند و تنها وقتی برابر این مقدار می‌شود که داشته باشیم:

$$\alpha=\beta=\gamma=\frac{۲\pi}{۳}$$

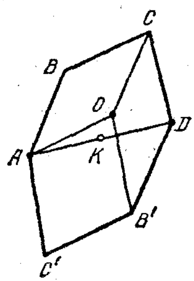
یعنی وقتی که، این شش ضلعی، منتظم باشد.

∇ می‌توان ثابت کرد، بین همهٔ n ضلعی‌هائی که طول ضلع‌های آن، به‌ردیف، برابر $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_{n-۱}$ باشند (به‌جز یکی از ضلع‌ها، AZ، که نامعلوم است)، مساحت آن n ضلعی حداکثر مقدار ممکن است که، همهٔ رأس‌های آن، روی محیط نیم‌دایره‌ای به‌قطر AZ واقع باشند. و این در واقع، حالتی از «مسألهٔ دی‌بون» است: چگونه می‌توان دو انتهای نخی به‌طول معلوم را روی خط‌راست مفروضی قرارداد تا مساحت شکل محدود به نخ و خط‌راست، حداکثر مقدار ممکن باشد (جواب این مساله این است که، نخ را، باید به‌صورت یک نیم‌دایره درآورد).

اگر هم، طول همهٔ ضلع‌های یک n ضلعی معلوم باشند، حداکثر مساحت مربوط به آن n ضلعی است که قابل محاط در یک دایره باشد (و اگر ردیف ضلع‌های n ضلعی مشخص باشد، جواب منحصر به‌فرد است). به‌همین ترتیب، حداکثر مساحت در بین شکل‌های با محیط ثابت، متعلق به‌دایره است.



شکل ۵۱



شکل ۵۵

مسألهٔ ۲۰.۴ پاسخ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

چند وجهی محدب شامل ۵ رأس را می‌توان به‌صورت دوهرم مثلث‌القاعده (چهار وجهی) درنظر گرفت که درقاعده مشترک‌اند (شکل ۵۱). در واقع، دراین چند وجهی می‌توان رأسی را پیداکرد که، ازآن، ۴ یال به‌همهٔ رأس‌های دیگرخارج شده است (اگرفرض کنیم، ازهمهٔ رأس‌ها، تنها سه یال خارج شده است،آن وقت باید دوبرابرتعداد همهٔ یال‌ها برابر 3×5، یعنی ۱۵ باشد، که به‌دلیل فرد بودن عدد ۱۵ ممکن نیست) . فرض‌کنیم AB، AD، AC و AE، چهاریال متوالی کنج چهاروجهی به رأس A باشند؛ در این صورت، می‌توان دوچهاروجهی $ABCD$ و $ABCE$ را درنظر گرفت که درقاعدهٔ ABC مشترک‌اند و روی هم چند وجهی ما را می‌سازند. به این ترتیب، حجم چهاروجهی برابراست با

$$V = \frac{1}{3} S (h_E + h_D)$$

که درآن h_D و h_E به‌ترتیب طول عمودهای وارد از رأس‌های D و E بر قاعدهٔ ABC، و S مساحت مثلث ABC است.

K را نقطهٔ برخورد پاره‌خط راست DE باصفحهٔ ABC می‌گیریم؛ در این‌صورت

$$h_D + h_E \leqslant DK + KE = DE \leqslant 2$$

زیرا فاصلهٔ هردونقطه ازسطح کره، ازطول قطرآن تجاوزنمی‌کند.

شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC را R می‌نامیم (این دایره، مقطع کره با صفحهٔ ABC است). دراین صورت (مسألهٔ ۱۸.۴ یا ۱۹.۴ را ببینید):

$$S \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

زیرا، شعاع هرمقطعی ازکره، ازشعاع کره تجاوزنمی‌کند. به‌این ترتیب

$$V \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

درضمن $V=\frac{\sqrt{3}}{2}$، وقتی به‌دست می‌آید که مثلث ABC، مثلثی متساوی‌الاضلاع محاط دراستوا (دایرهٔ عظیمهٔ کرهٔ محیطی چند وجهی) ونقطه‌های D و E، قطب‌های کره باشند.

∇ مسألهٔ کلی: بین همهٔ چند وجهی‌های محاط درکره که دارای n رأس باشند، آن را پیداکنید که دارای حداکثر حجم باشد. واین، مسأله‌ای بسیاردشوار است.

می‌توان ثابت کردکه، این چند وجهی، برای $n=6$، یك هشت‌وجهی منتظم است، ولی برای $n=8$، چند وجهی با حجم ماکزیمم، یك مکعب نیست. مشابه مسطحهٔ این مسأله، مسأله‌ای ساده است: برای هرعدد $n \geqslant 3$، از بین n ضلعی‌های محاط در یك دایره، مساحت n ضلعی منتظم، حداکثر مقدار ممکن است (و این نتیجهٔ ساده‌ای از مجموع سینوس‌های زاویه‌هایی بین ۰ و π است: بحث مسألهٔ ۱۸.۴ را ببینید).

مسألهٔ ۲۱.۴. مربع‌های به‌ضلع واحد را درنظر می‌گیریم که مرکزهای آن‌ها روی همهٔ گره‌هایی ازشبکه باشند که در درون دایرهٔ به‌شعاع ۱۰ قرار گرفته‌اند (ضلع‌های این مربع‌ها را موازی خطهای راست شبکه می‌گیریم).

چون طول‌قطرهریك ازاین مربع‌ها، برابراست با $\sqrt{2}<2$، بنابراین، همهٔ این مربع‌ها سطح دایرهٔ به‌شعاع ۹ وهم مرکزبا دایرهٔ مفروض را می‌پوشانند. درنتیجه، مجموع مساحت‌های آن‌ها (که از نظرعددی، باتعداد گره‌های شبکه برابراست)، از 81π (مساحت دایرهٔ به‌شعاع ۹) بیشتراست. و درضمن $81\pi > 251$.

∇ می‌توان مسأله‌ای کلی‌تر را تنظیم کرد: تعداد جواب‌های x و y را در مجموعهٔ عددهای درست، برای نامعادلهٔ $x^2+y^2<n$ ارزیابی کنید (درمسألهٔ ما $n=100$). ازحل مسأله، می‌توان نتیجه گرفت که، این تعداد، از $\pi(\sqrt{n}-1)^2$ کمتر نیست.

مسألهٔ ۲۲۰۴. پاسخ: نمی‌توان.

کره‌ای به‌مرکز نقطهٔ مفروض و به‌شعاع R رسم می‌کنیم. برای هر نیم خطی که از O می‌گذرد، یك سطح مخروطی می‌سازیم که رأس آن در O و زاویهٔ بین مولدآن با این نیم خط برابر ۳۰ درجه باشد (نیم خط، محور سطح مخروطی را تشکیل می‌دهد). «کلاهکی» را درنظرمی گیریم که بخشی ازسطح کره، بین این سطح مخروطی است. مساحت این «کلاهك» (قطعهٔ کروی)، برابر است با $۲\pi Rh$ که، در آن، h ارتفاع «کلاهك» است:

$$h=R(۱-\cos ۳۰^\circ)=R\left(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

به‌این ترتیب، نسبت مساحت «کلاهك» به‌مساحت سطح تمامی کره ($۴\pi R^۲$)، چنین می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)>\frac{۱}{۱۵}$$

درستی این نابرابری روشن است، زیرا می‌توان به‌ترتیب نوشت:

$$(۲-\sqrt{۳})۱۵>۴،\ ۲۶>۱۵\sqrt{۳}،\ ۲۶^۲=۶۷۶>۱۵^۲\times ۳=۶۷۵$$

بنابراین، دوتا از ۱۵ «کلاهکی» که به‌کمك ۱۵ نیم خط به دست آمده‌اند، به‌ناچاریکدیگر را قطع می‌کنند، یعنی دوتا ازنیم خطها، زاویه‌ای کوچکتراز ۶۰ درجه می‌سازند.

∇ می‌توان پرسش کلی‌تری مطرح کرد: اگراز نقطهٔ مفروض O، n نیم‌خط راست درفضا رسم کنیم، مقدار α_n، کوچکترین زاویهٔ بین این نیم‌خطها، حداکثرچقدرمی‌تواند باشد (ویا هم‌ارزآن: اگر n «کلاهك» یکسان روی سطح کره درنظربگیریم، به‌نحوی که متقاطع باهم نباشند، حداکثر اندازهٔ هریك از «کلاهك»ها چقدراست)؟ پاسخ دقیق به‌این پرسش تنها برای $n\leqslant ۹$ و $n=۱۲$ معلوم است؛ اگرچه برای بسیاری از مقدارهای n، ارزیابی‌های خوبی، برای مقدار α_n، به‌دست آمده است.

مسألهٔ ۲۳۰۴. نقطهٔ A را روی محیط دایرهٔ اول و نقطهٔ B را روی محیط دایرهٔ دوم علامت می‌گذاریم. وقتی دو دایره را روی هم می‌گذاریم، موقعیت دایرهٔ دوم نسبت به‌دایرهٔ اول را با مقدار زاویه‌ای t از کمان AB معین می‌کنیم و روشن است که $۰^\circ \leqslant t \leqslant ۳۶۰^\circ$ (با محاسبهٔ درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت).

مقداری از t را «غیرقابل قبول» می‌نامیم، وقتی که، به‌ازای آن، دست‌کم دوتا ازکمان‌های مورد نظر یکدیگر را قطع کرده باشند.

یکی ازکمان‌های ۲۵ درجه و یکی از کمان‌های ۳۰ درجه را در نظر می‌گیریم. آن‌ها دربخشی از t به‌اندازهٔ ۵۵ درجه، یکدیگر را قطع می‌کنند. این بخش‌های «غیرقابل‌قبول»، نمی‌توانند بیش‌از $۶ = ۲ \times ۳$ باشند. بنابراین، مجموعهٔ مقدارهای «غیر قابل قبول» t، نمی‌توانند درمجموع، بیش از ۵۵×۶، یعنی ۳۳۰ درجه باشد و همهٔ مجموعهٔ مقدارهای t را (از ۰ درجه تا ۳۶۰ درجه) نمی‌پوشاند. به این ترتیب، مقدار «قابل قبولی» برای t وجود داردکه، به ازای آن، هیچ دو کمانی یکدیگررا قطع نمی‌کنند.

∇ به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کردکه، اگر روی محیط یك دایرهٔ به‌شعاع واحد، کمان‌های غیر متقاطع $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، α_n و روی محیط دایرهٔ به‌شعاع واحد دوم، کمان‌های غیرمتقاطع $\beta_۱$، $\beta_۲$، ...، β_m را جداکنیم و درضمن

$$m(\alpha_۱+\alpha_۲+\cdots+\alpha_n)+n(\beta_۱+\beta_۲+\cdots+\beta_m)<۳۶۰^\circ$$

آن وقت، می‌توان محیط دو دایره را طوری روی‌هم قرارداد که این کمان‌ها متقاطع نباشند.

«عکس» این پرسش هم، جالب است: عددهای $\alpha_۱$،$\alpha_۲$،...،α_n و $\beta_۱$، $\beta_۲$،...،β_m چه شرطهایی داشته باشند تا با هر وضعی که دو دایره روی هم قرار گیرند، بعضی‌ازکمان‌ها متقاطع باشند؟

روشی را که برای حل مسألهٔ ۲۳.۴ به‌کاربردیم، می‌توان حالت

پیوستهٔ اصل‌دیریکله نامید (مسألهٔ ۹.۲ را ببینید). این اصل، درهردوحالت خود، یك نارسایی دارد: نشان نمی‌دهد که، مثلاً، چگونه می‌توان دو دایره را به‌صورت مورد نظر، روی هم قرارداد.

مسألهٔ ۲۴.۴. مقایسهٔ وزنه‌ها را درسه مرحله انجام می‌دهیم.

۱. دو وزنه را انتخاب وآن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. فرض کنید، وزن‌آن‌ها a و b باشد و، درضمن $a<b$. دو وزنهٔ دیگر انتخاب وبا هم مقایسه می‌کنیم: $c<d$. سپس، ازبین این دو زوج وزنه، آن‌هایی را که سنگین‌ترند، مقایسه می‌کنیم. مثلاً فرض کنید: $b<d$.

۲. جای وزنهٔ پنجم(مثلاً به‌وزن e) را، بین سه وزنهٔ $a<b<d$ پیدا می‌کنیم. برای این منظور، کافی است دوبارازترازو استفاده‌کنیم: ابتدا e را با b مقایسه می‌کنیم. سپس، اگر $e<b$ باشد،آن را با a و اگر $e>b$ باشد، آن را با d مقایسه می‌کنیم. اکنون ردیف وزنه‌های a، b، d و e برای ما معلوم است.

۳. جای وزنهٔ c را بین سه وزنهٔ a، b و c پیدا می‌کنیم (باز هم با دو بار استفاده‌ازترازو، شبیه قبل). چون، بعدازمرحلهٔ ۱، می‌دانیم $c<d$، جای c بین هرچهار وزنهٔ دیگرمعلوم می‌شود.

درمرحلهٔ ۱، سه‌بار و درهر یك از دو مرحلهٔ ۲ و ۳، دوبار از ترازو استفاده کرده‌ایم، روی هم هفت بار.

∇ ثابت می‌کنیم، باکمترازهفت‌بار استفادهٔ ازترازو، نمی‌توان ۵ وزنه را، به ردیف صعودی وزن‌های آن‌ها، مرتب کرد. روی هم، به $۱۲۰ = ۵!$ طریق، می‌توان وزنه‌ها را کنارهم چید. هرمقایسه، یکی ازدونتیجه را به‌بار می‌آورد. بنابراین، بعد از p بار استفاده از ترازو، نمی‌توان به بیش از ۲^p حالت رسید (در بدترین حالت، بعد از مقایسه‌های نوبتی، تعداد حالت‌های ممکن، بیش از دو تا کم نمی‌شود). بنابراین، برای ۵ وزنه، وقتی می‌توان آن‌ها را، بعد از p بار استفاده از ترازو، مرتب کرد که داشته باشیم:

$$۲^p \geqslant ۱۲۰ \Rightarrow p \geqslant \log_۲ ۱۲۰ \Rightarrow p \geqslant ۷$$

درحالت کلی، برای مرتب کردن n وزنه، دست کم به $\log_{۲}(n!)$ بار استفاده از ترازو احتیاج داریم.

مسألهٔ کلی مربوط به حداقل تعداد $F(n)$ استفاده از ترازو، برای ردیف کردن n وزنه، هنوز به طور کامل حل نشده است و علاقهٔ بسیاری از متخصصان برنامه‌ریزی را به خود جلب کرده است.

چند روش کلی، برای مرتب کردن n وزنه، اندیشیده شده است، ولی برای n وزنه (دربسیاری موردها)، باهمهٔ این روش‌ها، عدد $[\log_{۲}n!]+۱$ به‌دست می‌آید. ساده‌ترین این روش‌ها، همان است که درحل مسألهٔ ۲۴.۴، کم وبیش از آن استفاده کردیم. با این روش، در k امین مرحله $(k=۱،...،n-۱)$، وزنهٔ تازهٔ $(k+۱)$ام را انتخاب و جای آن را در ردیف k وزنه‌ای که قبل از آن پیدا شده است، معین می‌کنند. برای این منظور، ابتدا وزن این وزنه را با وزن وزنه‌ای که در وسط ردیف قرار گرفته است مقایسه می‌کنند، سپس با وزنهٔ وسط نیمه‌ای از ردیف، که باید درآن‌جا باشد وغیره. درمرحلهٔ kام، به‌تعدادی مقایسه نیازاست که از $[\log_{۲}k]+۱$ تجاوز نمی‌کند. بنابراین، برای ردیف کردن n وزنه، حداکثر تعداد مقایسه‌ها، چنین است:

$$(۱+\log_{۲}۲)+(۱+\log_{۲}۳)+\cdots+$$
$$+(۱+\log_{۲}(n-۱))<n(۱+\log_{۲}n)$$

به‌این ترتیب، حداقل $F(n)$، تعداد مقایسه‌ها، باید درنابرابری‌های زیر صدق کند:

$$\log_{۲}(n!)\leqslant F(n)<n(۱+\log_{۲}n)$$

ولی این روش، تنها برای $n\leqslant ۴$، مقداردرست $F(n)$ را می‌دهد:

$$F(۲)=۱،\ F(۳)=۳،\ F(۴)=۵$$

برای حالت $n=۵$، جواب $F(۵)=۸$ به‌دست می‌آید ونه $F(۵)=۷$.

اگردقیقاً همان روش حل مسألهٔ ۲۴.۴ را تعمیم دهیم، برای $n \leqslant ۱۲$ و $n = ۲۰$ و $n = ۲۱$، به‌جواب درست می‌رسیم، ولی برای همهٔ مقدارهای n، کوچکترین عدد $F(n)$ به‌دست نمی‌آید.

مسأله‌هایی برای کارمستقل دانش‌آموزان

۲۵.۴. a و b را طول ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه و c و h را طول وتر و ارتفاع وارد بروتر، درمثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌گیریم. حداکثر مقدار $\frac{c+h}{a+b}$ را پیداکنید.

۲۶.۴. بـرای سه جملـه‌ای درجـهٔ دوم $f(x) = ax^۲ - ax + ۱$، می‌دانیم برای $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ داریم: $|f(x)| \leqslant ۱$. a، حداکثرچقدرمی‌تواند باشد؟

۲۷.۴. می‌دانیم، درصد موخرمایی‌ها دربین چشم آبی‌ها، بیشتراست ازدرصد موخرمایی‌ها دربین همهٔ مردم. کدام بیشتراست: درصد چشم‌آبی‌ها دربین موخرمایی‌ها، یا درصد چشم‌آبی‌ها دربین همهٔ مردم؟

۲۸.۴. مجموع ده عدد طبیعی مختلف، برابر است با **۱۹۸۶**. مجموع سه‌عددکوچکتر، حداکثرچقدرمی‌تواند باشد؟

۲۹.۴. ثابت کنید، اگر زاویه‌های یـك پنج ضلعی محدب، به تصاعد حسابی باشند، هریك از زاویه‌های‌آن، از۳۶ درجه بیشتراست.

۳۰.۴. نقطهٔ دلخواهی را، در درون مثلث بـه‌مساحت واحد انتخاب و، ازآن جا، خـط‌های راستی موازی ضلع‌های مثلث رسم کرده‌ایم. مثلث، به ۶ بخش تقسیم مـی‌شود. مساحت ایـن بخش‌ها را، بـه‌ترتیب صعودی، شماره گذاری می‌کنیم:

$$S_۱ \leqslant S_۲ \leqslant \cdots \leqslant S_۶$$

هریك ازاین ۶ مساحت، چه‌مقدارهایی را می‌توانند قبول کنند؟

۴.۳۱. مساحت یک چهارضلعی برابر واحد است. حداقل مقدار مجموع دو قطر آن چقدر است؟

۴.۳۲. ۹ خودکار ۱۱ تومان و چند ریال و ۱۳ خودکار ۱۵ تومان و چند ریال قیمت دارند. اگر همهٔ خودکارها، به یک قیمت باشند، قیمت هر خودکار چقدر است؟

۴.۳۳. کوچکترین عدد طبیعی n را پیدا کنید که، به ازای آن، عدد طبیعی m وجود داشته باشد، به‌نحوی که

$$\frac{۲۲۵}{۱۲۷}<\frac{m}{n}<\sqrt{۳}$$

۴.۳۴. دوسازمان تولیدی، M و K، می‌توانند با یکی از سه نوع سوخت کارکنند: نفت، ذغال‌سنگ و گاز. ذخیرهٔ نفت به‌اندازه‌ای است که M می‌تواند با آن، ۱۶ ماه کارکند؛ ولی اگر K از ذخیرهٔ نفت استفاده کند، کار ۹ ماه‌آن را تأمین می‌کند. ذخیرهٔ ذغال سنگ، برای کار ۱۱ ماه M ویا ۷ ماه K کافی است؛ و با ذخیرهٔ گاز، M می‌تواند ۵ ماه و K می‌تواند ۳ ماه کارکند. هردوسازمان، با این ذخیره‌های سوخت، حداکثرچه‌زمانی می‌توانند کارکنند؟ (آغاز وپایان کاردوسازمان، هم زمان است.)

۴.۳۵. درفاصله‌های زمانی برابر، هرباریک اتوبوس، بدون توقف و با سرعت‌هایی ثابت، روی جاده وبه‌یک طرف حرکت می‌کنند. شخصی، ۴ کیلومتردرجاده پیش رفت و، در این مدت، ۶ اتوبوس از او جلو افتاد. بار دیگر ۷ کیلومترپیش رفت و ۸ اتوبوس ازاوجلوافتاد. بار سوم، ۱۷ کیلومتر پیش رفت. درفاصلهٔ این ۱۷ کیلومتر، چند اتوبوس ازاوجلو می‌افتد؟ (سرعت پیاده، درهرسه‌بار، یکی است.)

۴.۳۶. همهٔ جواب‌های این دستگاه معادله‌ها را پیدا کنید:

$$\begin{cases} x+y=۲ \\ xy-z^{۲}=۱ \end{cases}$$

۰۳۷.۴ ۱۱ عدد طوری پیدا کنید که، هر کدام از آن‌ها، برابر مجذور مجموع ده عدد دیگر باشد.

۰۳۸.۴ به‌ازای کدام عدد طبیعی n، مقدار $\frac{n^2}{(1/001)^n}$ به حداکثر مقدارخود می‌رسد؟

۰۳۹.۴ به‌ازای چه‌مقدارهایی از n، می‌توان n عدد طوری انتخاب کرد که، مجموع همهٔ‌حاصل ضرب‌های دوبه‌دوی آن‌ها برابر واحد، ومجموع مجذورهای همهٔ آن‌ها، کوچکتراز ۰/۰۱ باشد؟

۰۴۰.۴ ثابت کنید، نابرابری زیر، برای همهٔ مقدارهای مثبت a، b و c برقرار است:

$$a^5+b^5+c^5 \geqslant a^2b^2c+a^2c^2b+b^2c^2a$$

۰۴۱.۴ اگر $0<a<\frac{\pi}{2}$ و $0<b<1$، ثابت کنید:

$$\int_0^a \sin x dx+\int_0^b \arcsin x dx \geqslant ab$$

۰۴۲.۴ a، b و c را طول ضلع‌ها، و P و S را، به‌ترتیب، محیط و مساحت مثلث فرض می‌کنیم. این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

الف) $\frac{1}{3}P^2 \leqslant a^2+b^2+c^2<\frac{1}{2}P^2$

ب) $S<\frac{1}{6}(ab+bc+ca)$

۰۴۳.۴ کدام بزرگتر است:

الف) 3^{500} یا 7^{300}؛ ب) $2^{3^{100}}$ یا $3^{2^{150}}$؛

ج) $\log_5 6$ یا $\log_6 7$؛ د) $\frac{\sin 6^\circ}{\sin 5^\circ}$ یا $\frac{\sin 7^\circ}{\sin 6^\circ}$؛

ه) $\frac{tg۶^\circ}{tg۵^\circ}$ یا $\frac{tg۷^\circ}{tg۶^\circ}$؟

۴۴.۴. ثابت کنید:

الف) برای عددهای مثبت و دلخواه x و y و z

$$\frac{۱}{۱+x}+\frac{۱}{۱+y}+\frac{۱}{۱+z}\geqslant\frac{۹}{۳+x+y+z}$$

ب) برای عددهای α، β و γ، بین ۰ و π

$$\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma\leqslant \sin^{۳}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳}$$

۴۵.۴. عدد ۱۰۰ را به‌صورت مجموع چند عددطبیعی طوری بنویسید که، حاصل ضرب‌آن‌ها، حداکثرمقدارممکن باشد.

۴۶.۴. اگرچهارضلع ازیك پنج‌ضلعی، طولی برابر واحد داشته باشند، حداکثر مساحت این پنج ضلعی چقدراست؟

۴۷.۴. آیا می‌توان در دایرهٔ به‌شعاع ۱۰، ۳۰۰ نقطه طوری قرار دادکه فاصلهٔ دو به‌دوی آن‌ها، از واحدکمترنباشد؟

۴۸.۴. روی محیط یکی از دو دایرهٔ مساوی، ۵۰ نقطه به‌رنگ قرمز و روی محیط دایرهٔ دوم، چندکمان آبی رنگ، که مجموع طول‌های آن‌ها از $\frac{۱}{۵۰}$ محیط دایره کمتراست، علامت گذاشته‌ایم. ثابت کنید، می‌توان دایرهٔ اول را طوری روی‌دایرهٔ دوم قرار دادکه هیچ‌کدام از نقطه‌های قرمز، روی یکی ازکمان‌های‌آبی قرارنگیرد.

۴۹.۴. روی‌ضلع‌های‌مجاور به‌زاویهٔ‌قائمهٔ a و b ازمثلث قائم‌الزاویه‌ای، نقطه‌های P و Q را انتخاب و از آن‌ها، عمودهای PK و QH را بر وتر رسم کرده‌ایم. حداقل مجموع زیر را پیدا کنید:

$$KP+PQ+QH$$

۵۰۴. دو رزم‌ناو، با سرعت‌های ثابت، در دریا حرکت می‌کنند. در ساعت ۸، فاصلهٔ بین‌آن‌ها ۲۰ میل، درساعت ۸ و ۳۵ دقیقه ۱۵ میل و در ساعت ۸ و ۵۵ دقیقه ۱۳ میل است. درچه ساعتی به‌کمترین فاصلهٔ بین خود می‌رسند؟ این فاصله چقدراست؟ (دریا را مسطح و رزم‌ناوها را، نقطه به‌حساب می‌آوریم.)

۵

مثال‌ها و ساختمان‌های غیرعادی

۱۰۵. قطاری دریك سمت، ۵/۵ ساعت حرکت کرده است. می‌دانیم، درهرفاصلهٔ زمانی یك ساعت، درست ۱۰۰ کیلومترجلو می‌رود.

الف) آیا حرکت قطاریکنواخت (با سرعت ثابت) است؟

ب) آیا می‌توان گفت که، سرعت متوسط قطار، ۱۰۰ کیلومتر در ساعت است؟

۲۰۵. شخصی، هرماه درآمد و هزینهٔ خود را یادداشت می‌کند. آیا ممکن است وضعی پیش‌آیدکه، درهر پنج ماه متوالی، هزینهٔ او از درآمدش بیشتر، ولی درتمامی سال، درآمد او ازهزینه‌اش بیشترباشد؟

۳۰۵. آیا می‌توان عدد ۲۰۳ را به‌صورت مجموع چند عدد طبیعی طوری نوشت‌که، حاصل‌ضرب همهٔ‌آن‌ها، بازهم برابر۲۰۳ باشد؟

۴۰۵. آیا این گزاره درست است: از بین هرشش عدد طبیعی دلخواه، می‌توان یا سه عدد انتخاب‌کردکه دوبه‌دو نسبت به‌هم اول باشند و یا سه عدد انتخاب‌کردکه مقسوم‌علیه مشترکی بزرگتراز واحد داشته باشند؟

۰۵۰۵ آیا این گزاره‌ها درست‌اند:

الف) ازهرپنج عددمختلفی که به‌ردیفی دلخواه نوشته‌شده‌اند، می‌توان سه عدد پیدا کرد، به‌نحوی که، دراین ردیف، به ترتیب نزولی یا به ترتیب صعودی قرار گرفته باشند؛

ب) ازهرنه عددمختلفی که به‌ردیفی‌دلخواه‌نوشته‌شده باشند، می‌توان چهارعددپیدا کرد که، دراین‌ردیف، به‌ترتیب‌نزولی یا به‌ترتیب‌صعودی‌باشند؟

۰۶۰۵ الف) مجموع چند عدد برابر واحد است. آیا ممکن است، مجموع مکعب‌های این سه‌عدد، از واحد بیشترباشد؟

ب) همین پرسش، برای عددهایی که درضمن، هر کدام از آن‌ها، کوچکتر از واحد باشند.

۰۷۰۵ $f(x)$ درهرنقطه ازبازهٔ $[0, 1]$ پیوسته است و $f(0) = f(1)$. آیا درست است که، نموداراین تابع، وتری موازی با محور طول دارد:

الف) به‌طول $\frac{1}{5}$؛ ب) به‌طول $\frac{2}{5}$؟

(وتر نمودار، به پاره خط راستی گویند که، دو انتهای آن، روی نمودار باشد.)

۰۸۰۵ آیا این پیش‌آمد ممکن است: طول همهٔ ضلع‌های یك مثلث، از ۱ سانتی‌مترکمتر و طول همهٔ ضلع‌های مثلث دیگر از ۱۰۰ متربیشترباشد، ولی مساحت مثلث اول، بزرگتراز‌مساحت مثلث دوم شود؟

۰۹۰۵ آیا ممکن است:

الف) طول هریك از ارتفاع‌های مثلث از ۱ سانتی‌متر کمتر، ولی مساحت‌آن، از ۱۰۰ سانتی‌مترمربع بیشترباشد؛

ب) طول هر ارتفاع مثلث از ۲ سانتی‌متر بیشتر، ولی مساحت‌آن از۲ سانتی‌مترمربع کمترباشد؟

۱۰۰۵ آیااین گزاره درست‌است: برای‌هرنقطهٔ واقع‌در درون یك‌چهارضلعی محدب، مجموع فاصله‌های آن از رأس‌های چهارضلعی، ازمحیط کمتراست؟

۵.۱۱۰ آیا می‌توان مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین را، به‌چند مثلث متشابه باآن تقسیم کرد، به‌نحوی که دربین آن‌ها، مثلث‌های برابر وجود نداشته باشد؟

۵.۱۲۰ آیا می‌توان به کمک سه میله و چند نخ، ساختمان فضایی پایدار و محکمی ساخت، به‌نحوی که میله‌ها با هم تماس نداشته باشند وتنها با نخ‌هایی که به‌دوانتهای آن‌ها وصل است، به‌هم مربوط باشند؟

۵.۱۳۰ آیا می‌توان دریك مکعب چوبی، چنان سوراخی به وجود آورد که مکعبی با اندازه‌های مکعب اصلی، از آن عبور کند؟

۵.۱۴۰ آیا یك چند وجهی وجود دارد (لازم نیست محدب باشد) که به‌اندازهٔ مکعب، رأس، یال و وجه داشته باشد، ولی هیچ کدام از وجه‌های آن چهارضلعی نباشد؟

۵.۱۵۰ آیا می‌توان شش نقطه برصفحه قرار داد وآن‌ها را با پاره‌خط‌های راستی چنان به‌هم وصل کرد که هرنقطه درست

الف) به سه نقطهٔ؛ ب) به‌چهار نقطهٔ

دیگروصل شده باشد؟

۵.۱۶۰ آیا خط شکستهٔ بسته‌ای وجود داردکه هرضلع خود را درست یك‌بارقطع کند و از الف) شش ضلع؛ ب) هفت ضلع تشکیل شده باشد؟

۵.۱۷۰ تعداد زیادی سکه‌های گرد برابردراختیارداریم. آیا می‌توان روی صفحه

الف) ۲۴؛ ب) ۲۵

سکه‌را طوری‌قرارداد، به‌نحوی که‌هرسکه برسه‌سکهٔ دیگرمماس باشد؟

۵.۱۸۰ درمورد یك اجتماع می‌دانیم، هردو نفری که باهم آشنا نیستند، درست دوآشنای مشترك دارند، و هردونفری که با هم آشنا هستند، هیچ آشنای مشترکی ندارند. آیا ممکن است، در این اجتماع، بیش از چهارنفر وجود داشته باشد؟

۵.۱۹۰ سه‌نفر، چند دور شطرنج باهم بازی کردند؛ در ضمن تعداد

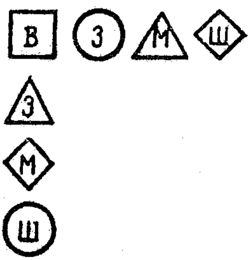
بازی‌های هردونفر باهم، با تعداد بازی‌های هردونفر دیگر، یکی‌است. بعد، با هم‌به گفت‌وگو نشستند تا معلوم کنند، چه کسی برنده است. اولی گفت: «برد من از همه بیشتر است». دومی گفت: «باخت من از همه کمتر است». سومی سکوت کرد؛ ولی وقتی امتیازها را محاسبه کردند، معلوم شد که، سومی، امتیاز بیشتری کسب کرده‌است. آیا ممکن‌است، چنین‌وضعی پیش‌آمده باشد؟ (امتیازها را این‌طور محاسبه می‌کنند: برای برد ۱ امتیاز، برای مساوی $\frac{۱}{۲}$ امتیاز و برای باخت ۰ امتیاز.)

۲۰۰۵. آیا می‌توان جدول ۴ × ۴ را (شکل ۵۲) با حرف‌های B، Z، M و S طوری پرکرد که هریک از آن‌ها درچهار کادر مختلف (مربع، لوزی، مثلث و دایره) قرار گیرند، هرکدام از آن‌ها به چهار رنگ مختلف باشند و همهٔ شرط‌های زیرهم برقرارباشند:

الف) درهرسطر وهرستون، هر حرف، هر رنگ وهر کادر وجود داشته باشد؛

ب) هرحرف، تنها یك‌بار، به رنگ معینی درآمده باشد؛

ج) هرکادر، شامل همهٔ حرف‌ها و همهٔ رنگ‌ها باشد؟



شکل ۵۲

۲۱۰۵. بعد ازهردور کار، چند عضو انجمن‌ریاضی (نه‌یك نفربه‌تنهایی ونه همهٔ‌آن‌ها با هم)، برای صرف بستنی به کافه می‌روند. درضمن، درانجمن ریاضی، قانون سختی وجود دارد: بعد ازهرمراجعهٔ به کافه، هیچ دونفری از آن‌ها، نمی‌توانند دوباره با هم‌برای صرف بستنی بروند. بعد ازآخرین دور کار، معلوم شد‌که حالا، عضوهای انجمن، تنهابه‌نوبت ویکی‌یکی می‌توانند برای صرف بستنی بروند.

الف) اگراین انجمن ۴عضو داشته باشد، چند دور کارمی‌تواند وجود

داشته باشد؟ (همهٔ جواب‌های ممکن را پیدا کنید.)

ب) اگر این انجمن ۷ عضو داشته باشد، برنامه‌ای برای ۷ بار مراجعهٔ به کافه تنظیم کنید.

بحث و بررسی مسأله‌ها

مسألهٔ ۱۰۵. پاسخ «الف» و«ب»: حرکت قطار ممکن است یکنواخت نباشد؛ لزومی ندارد سرعت متوسط قطار، ۱۰۰ کیلومتردرساعت باشد.

تمام زمان حرکت قطار را به ۱۱ فاصلهٔ نیم ساعتی تقسیم می‌کنیم. این فاصله‌های زمانی نیم ساعتی را شماره‌گذاری وفرض می‌کنیم، قطار، در فاصله‌های زمانی ردیف فرد k کیلومتر ($۰ \leqslant k \leqslant ۱۰۰$) و در هر فاصلهٔ زمانی ردیف زوج ($۱۰۰-k$) کیلومترحرکت کند. به‌این ترتیب، اعم از این که‌قطار، درهردونیم ساعت‌متوالی، یکنواخت حرکت کند ویاغیریکنواخت، درهرحال، ساعتی ۱۰۰ کیلومترحرکت کرده است.

برای پاسخ به‌پرسش «ب»، سرعت متوسط حرکت قطار را محاسبه می‌کنیم. فاصله‌ای که قطاردر همهٔ نیم ساعت‌های ردیف فرد طی می‌کند، برابراست با $۶k$ و فاصله‌ای که درنیم ساعت‌های ردیف زوج می‌پیمایدبرابر است با $۵(۱۰۰-k)$. بنابراین، در۵/۵ ساعت، روی هم، به‌اندازهٔ

$$۶k+۵(۱۰۰-k)=۵۰۰+k$$

کیلومترحرکت کرده است؛ وسرعت متوسط قطار، برابر $\frac{۵۰۰+k}{۵/۵}$ می‌شود. اگر $k\neq ۵۰$، آن وقت، سرعت متوسط قطار، برابر۱۰۰ کیلومتر در ساعت نمی‌شود.

∇ حرکت قطار، دراین مسأله، یک حرکت تناوبی است با تناوب $T=۱$ (ساعت). می‌توان ثابت کرد که، این تناوب سرعت حرکت، نتیجه‌ای ازشرطهای مسأله است. ازحل مسأله روشن است که، سرعت متوسط قطار،

می‌تواند هر عددی، از $\frac{۱۰۰۰}{۱۱}$ (به ازای $k=۰$) تا $\frac{۱۲۰۰}{۱۱}$ (به ازای $k=۱۰۰$) کیلومتردرساعت باشد.

مسألهٔ ۲۰۵. پاسخ: ممکن است.

نمونه‌ای می‌آوریم:

$$۲،۲،۲،۲،—۹،۲،۲،۲،۲،—۹،۲،۲$$

دراین جا، به‌ردیف (وبا در نظرگرفتن علامت)، اختلاف درآمد و هزینهٔ شخص را درهرماه ازسال نوشته‌ایم. می‌بینیم، مجموع هرپنج عدد متوالی، دراین زنجیرهٔ عددها، عددی است منفی (برابر ۱ —)، درحالی‌که مجموع همهٔ عددها، عددی است مثبت (برابر۲).

∇ تعمیم مسأله: در یك سطر، n عدد نوشته‌ایم و می‌دانیم، مجموع هرk عدد متوالی، مقداری منفی است؛ آیا ممکن است، مجموع هرn عدد، مقداری مثبت باشد؟ پاسخ این است: اگرn مضربی ازk باشد، چنین وضعی ممکن نیست، ولی اگر n بخش‌پذیربر k نباشد، ممکن است. درمسألهٔ ما: $n=۱۲$ و $k=۵$.

این حکم را هم می‌توان، به‌نوبهٔ خود، تعمیم داد. فرض کنید، n عدد را، دریك سطرنوشته باشیم. مجموع q عدد متوالی را دراین سطر S_q می‌نامیم. دراین صورت، اگر برای عددهای طبیعی مختلف m، n و k داشته باشیم:

$$m\leqslant n+k-d-۱$$

($d=(n،k)$، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك بین دو عدد n وk)، آن وقت می‌توان، m عدد را طوری دریك سطرنوشت که همهٔ S_nها را دارای یك علامت باشند و همهٔ S_kها، به‌علامت مخالف آن درآیند. به جزاین، همهٔ این مجموع‌ها را می‌توان برابرمقدارهای مفروضی که ازقبل تعیین شده‌اند، گرفت.

در واقع، می‌توان دستگاهی شامل $k+n-۲d$ معادلهٔ خطی، با

$k+n-d-1$ مجهول تشکیل داد:

$$\begin{aligned}
x_1+\cdots+x_n &= a_1,\\
x_2+\cdots+x_{n+1} &= a_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
x_{k-d}+\cdots+x_{k+n-d-1} &= a_{k-d},\\
x_1+\cdots+x_k &= b_1,\\
x_2+\cdots+x_{k+1} &= b_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
x_{n-d}+\cdots+x_{k+n-d-1} &= b_{n-d}
\end{aligned}$$

می‌توان ثابت کرد که، این دستگاه، جواب دارد: ماتریس آن، حداکثر از رتبهٔ $k+n-2d$ است. اگر عددهای n و k نسبت به‌هم اول باشند ($d=1$)، آن وقت، دارای جواب منحصر به‌فرد است؛ اگر $d>1$، آن وقت، دستگاه دارای $d-1$ مجهول آزاد است.

به این ترتیب، با مفروض بودن n و k، می‌توان سطری شامل $n+k-d-1$ عدد پیدا کرد که با شرطهای مورد نظر ما سازگار باشد. اگر

$$m\leqslant n+k-d-1$$

آن وقت، سطری که از نخستین m عدد تشکیل شده باشد، باز هم با شرطهای مورد نظر ما سازگار است.

اکنون ثابت می‌کنیم، اگر $m\geqslant n+k-d$، آن وقت، نمی‌توان سطری شامل m عدد پیدا کرد که همهٔ S_nهای آن یك علامت، و همهٔ S_kها علامت دیگری داشته باشند.

برعکس، فرض می‌کنیم، چنین سطری شامل $n+k-d$ عدد باشد و، درضمن، $n>k$. k عدد نخست را جدا می‌کنیم. درسطر، $n-d$ عدد باقی می‌ماند که، همهٔ S_kهای آن، مثل قبل، دارای یك علامت‌اند و همهٔ S_{n-k}ها

علامت مخالفی دارند. چون

$$n-d=(n-k)+k-d$$

ازمسأله‌ای با پارامترهای n و k، به‌مسأله‌ای با عددهای کوچکتر k و $n-k$ می‌رسیم. اگر این روند را ادامه دهیم (شبیه‌آلگوریتم اقلیدس)، به چنین موقعیتی می‌رسیم: سطری وجود داردکه همهٔ S_dها درآن، یك علامت‌دارند، ولی‌همهٔ S_{ld}ها، علامت دیگری که، نادرستی‌آن، روشن‌است. (دراین روند، یعنی پایین آمدن از $(n،k)$ به $(k،n-k)$، می‌توان شبیه آلگوریتم اقلیدس ثابت‌کردکه دستگاه بالا، متوافق می‌ماند.)

سرانجام، روشن است‌که، اگرسطری شامل $n+k-d$ عدد، سازگار با شرطها، وجود ندارد، به‌طورمسلم، نمی‌توان سطری طولانی‌ترازآن‌هم، پیدا کرد.

مسألهٔ ۳۰۵. پاسخ: می‌توان.

در واقع داریم:

$$۲۰۳=۷+۲۹+\underbrace{۱+۱+۱+\cdots+۱}_{۱۶۷\ \text{واحد}}=$$

$$=۷\times۲۹\times\underbrace{۱\times۱\times۱\times\cdots\times۱}_{۱۶۷\ \text{واحد}}$$

∇ این پرسش را مطرح می‌کنیم: کدام عددهای طبیعی را نمی‌توان به‌صورت مجموع و حاصل ضرب یك نوع عددهای طبیعی نوشت؟

پاسخ به‌این پرسش، چنین است: عددهای اول.

این پرسش هم، که به مسألهٔ ۵.۳ مربوط می‌شود، جالب است: به‌ازای‌کدام عددهای طبیعی k، معادلهٔ

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=x_1 \cdot x_2 \cdots x_k$$

درمجموعهٔ عددهای درست، جواب غیرصفردارد؟

ثابت شده است که، این معادله، به‌ازای هرمقداری از k، جواب دارد. مثلاً*

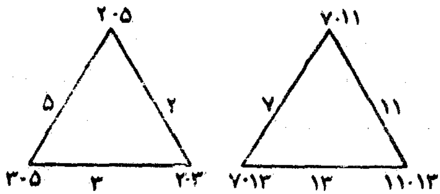
به‌ازای $k=۱$: $x_{۱}=۱$؛

به‌ازای $k=۲$: $x_{۱}=x_{۲}=۲$؛

به‌ازای $k>۲$: $x_{۱}=x_{۲}=\dots=x_{k-۲}=۱$،
$x_{k-۱}=۲$، $x_{k}=k$

مسألهٔ ۴۰۵. پاسخ: درست نیست.

مثالی که گزاره را نقض می‌کند: ۶، ۱۰، ۱۵، ۷۷، ۹۱، ۱۴۳. از این شش عدد (۳×۲، ۵×۲، ۵×۳، ۱۱×۷، ۱۳×۷ و ۱۳×۱۱)،



شکل ۵۳

هیچ سه عددی، مقسوم علیه مشترکی بزرگتر از واحد ندارند. درضمن، در انتخاب هیچ سه عددی هم، دوبه‌دو نسبت به‌هم اول در نمی‌آیند (دوتا از آن‌ها، دارای مقسوم‌علیه مشترک اند).

این وضع، به‌خوبی، درطرح شکل ۵۳ دیده می‌شود. درهر رأس مثلث، یکی ازعددها و، روی هر ضلع، عامل مشترک دوعدد واقع در دوانتهای ضلع، نوشته شده است.

▽ اگرشرط مسأله را اندکی تغییردهیم، به گزاره‌ای درست می‌رسیم:

---

* ۲۵۰ مسألهٔ حساب از سرپینسکی، ترجمهٔ پرویزشهریاری، مسأله‌های ۱۸۶ تا ۱۸۹ را ببینید.ـــم.

ازهرشش عددطبیعی، می‌توان یا سه‌عدد انتخاب کرد که دوبه‌دونسبت به‌هم اول باشند و یا سه عددی که، دوبه‌دو، مقسوم علیه مشترکی بزرگترازواحد داشته باشند.

مسألهٔ اخیررامی‌توان به‌صورت جالبی، که هم‌ارزآن است، بیان کرد: بین شش نفر، همیشه می‌توان سه نفر انتخاب کرد که یا دو به‌دو با هم آشنا باشند و یا دوبه‌دویکدیگر را نشناسند.

مسألهٔ ۵.۵۰ الف) پاسخ: درست است.

a و b را بزرگترین و کوچکترین عدد، دربین این عددها می گیریم. اگربین این دوعدد، عدد دیگری وجود داشته باشد، درستی گزاره روشن است. اگراین دوعدد a و b، مجاورهم قرارگرفته باشند، آن وقت، یا در سمت راست ویا درسمت چپ آن‌ها، باید دوعدد وجود داشته باشد؛ واین دوعدد، یا با عدد a و یا با عدد b، ردیف مورد نظر را تشکیل می‌دهند.

برای علاقه‌مندان. به‌این بهانه، می‌توان ازقضیه‌ای کلی یادکرد: در مجموعهٔ مرتب جزئی، که شامل $mn+1$ عضو است، همیشه می‌توان زنجیره‌ای از $m+1$ یا $n+1$ عضو پیدا کرد که دوبه دوباهم نسبتی نداشته باشند (این قضیه، نتیجه‌ای ازقضیهٔ معروف دیل‌وورت است: درهر مجموعهٔ مرتب جزئی، حداکثرتعداد زنجیره‌هایی که شامل همهٔ عضوهای مجموعه باشند، برابراست باحداکثرتعداد عضوهایی که دوبه‌دو باهم نسبتی ندارند).

درمورد پنج عدد، آن‌ها را می‌توان به‌این ترتیب، مرتب کرد. فرض می‌کنیم، برای عددهای a و b، نسبت $a<b$ برقرارباشد، به‌شرطی که a از b کوچکتر و عدد a درسمت چپ واقع باشد. به‌این مفهوم، عددهای c و d تنها وقتی نسبتی با هم ندارند که در ردیف نوشته شده، به ترتیب نزولی باشند.

چون $۵=۲\times۲+۱$ $(m=n=۲)$، ازقضیهٔ بالانتیجه می‌شود که، درپنج عدد، همیشه سه‌عدد پیدا می‌شود که یا به ردیف صعودی‌اند (زنجیرهٔ به‌طول $m+1=۳$) و یا به‌ردیف نزولی $(n+1=۳)$. اگردرقضیهٔ بالا، $m=n$ بگیریم، به‌این نتیجه می‌رسیم: ازدنباله‌ای‌متناهی که شامل $n^۲+۱$

عدد باشد، می‌توان دنبالهٔ یکنوا شامل $n+1$ عدد انتخاب کرد. قضیه‌ای هم که ازحالت حدی این قضیه، به‌ازای $n\to\infty$، به دست می‌آید، جالب است: ازهردنبالهٔ نامتناهی، می‌توان دنباله‌ای نامتناهی ویکنوا انتخاب کرد. اثبات قضیهٔ اخیر، از اثبات حالت متناهی n، ساده‌تراست.

ب) پاسخ: درست نیست.

مثالی که گزاره را نقض می‌کند، می‌آوریم: ده عدد

$$۳،۲،۱،۶،۵،۴،۹،۸،۷$$

ثابت می‌کنیم، دراین دنباله، نمی‌توان چهارعدد انتخاب کرد که به‌ردیف صعودی یابه‌ردیف نزولی باشند. برای این‌منظور، جمله‌های دنباله را به‌سه‌بخش، و درهربخش سه عدد، تقسیم می‌کنیم: ۳۲۱، ۶۵۴، ۹۸۷.

اگردوعدد ازاین نه‌عدد، به‌ردیف نزولی باشند، به ناچارهردوعدد، متعلق به‌یکی ازگروه‌های سه‌تایی است. یعنی نمی‌توان بیش ازسه عدد پیدا کردکه‌به‌ردیف نزولی باشند، زیراهمهٔاین‌عددها بایدمتعلق‌به‌یکی ازگروه‌های سه‌تایی باشند.

واگردوعدد ازاین نه‌عدد، به‌ترتیب صعودی‌باشند، به‌ناچاربه‌دوگروه مختلف تعلق دارند وچون بیش ازسه‌گروه نداریم، نمی‌توان بیش از سه‌عدد پیداکردکه به‌ترتیب صعودی باشند.

مسألهٔ ۶۰۵. الف) پاسخ: ممکن است.

مثال، دوعدد ۲ و ۱ــ:

$$۲+(-۱)=۱،\quad ۲^{۳}+(-۱)^{۳}=۷>۱$$

ب) پاسخ: ممکن است.

مثال برای هشت عدد؛ دو عدد برابر ۰/۸ وشش عدد برابر۰/۱ــ:

$$۲\times ۰/۸+۶(-۰/۱)=۱،\quad ۲(۰/۸)^{۳}+۶(-۰/۱)^{۳}=۱/۰۱۸>۱$$

برای علاقه‌مندان. به‌مناسبت این مسأله، می‌توان این‌پرسش را مطرح کرد: آیا ممکن است رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقارب و رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{3}$ متباعد باشد؟ پاسخ

به‌این پرسش مثبت است. به‌این رشته توجه کنید:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)+\ldots \qquad (*)$$

رشتهٔ $(*)$ به‌این ترتیب درست شده‌است: به دنبال مجموع $\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$،

به‌تعداد 2^3، یعنی ۸ مجموع $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)$، سپس به‌تعداد $27=3^3$ بار

ازمجموع $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)$، ...، سپس n^3 بارمجموع $\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}\right)$
آمده است (توجه‌کنید، هر عدد، یك جملهٔ از رشته به‌حساب می‌آید: مثلاً
جملهٔ اول رشته برابر ۱، جملهٔ دوم برابر $-\frac{1}{2}$ ، جملهٔ ششم برابر $-\frac{1}{4}$ ،

وجمله بیست و هشتم برابر $\frac{1}{3}$ است).

این رشته متقارب است، زیرا مجموع N جملهٔ اول‌آن، که درآن

$$3(1^3+2^3+\ldots+n^3)<N\leqslant 3(1^3+2^3+\ldots+$$
$$+n^3+(n+1)^3)$$

ازعدد $\frac{1}{n+1}$ تجاوزنمی‌کند (این مجموع، یا برابرصفراست، یا برابر

$\frac{1}{n+1}$ ویا برابر $\frac{1}{2(n+1)}$).

رشته‌ای که از مکعب جمله‌های رشتهٔ $(*)$ به دست می‌آید، متباعد
است، زیرا مجموع n^3 عبارت به‌صورت

$$\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(-\frac{1}{2n}\right)^3+\left(-\frac{1}{2n}\right)^3$$

برابر $\frac{۳}{۴}$ و، بنابراین، مجموع نخستین $۳(۱^۳+۲^۳+\ldots+n^۳)$ جملهٔ

آن برابر $\frac{۳n}{۴}$ می‌شود، یعنی تا بی‌نهایت ترقی می‌کند.

می‌توان ثابت کرد که تنها برای تابع‌هایی که در یك همسایگی صفر به‌صورت $f(x)=kx$ هستند، از تقارب رشتهٔ $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$، می‌توان تقارب رشتهٔ $\sum_{n=۱}^{\infty} f(a_n)$ را نتیجه گرفت.

مسألهٔ ۷.۵ الف) پاسخ: درست است.

تابع $y=F(x)=f\left(x+\frac{۱}{۵}\right)-f(x)$ را، که دربازهٔ $\left[۰\,,\frac{۴}{۵}\right]$ معین و پیوسته است، درنظرمی‌گیریم. باید ثابت کنیم، دراین بازه، نقطهٔ $x_۰$ وجود دارد که، به ازای آن، داشته باشیم: $F(x_۰)=۰$. بنابه تعریف تابع $y=F(x)$ داریم:

$$F(۰)=f\left(\frac{۱}{۵}\right)-f(۰) \qquad (۱)$$

$$F\left(\frac{۱}{۵}\right)=f\left(\frac{۲}{۵}\right)-f\left(\frac{۱}{۵}\right) \qquad (۲)$$

$$F\left(\frac{۲}{۵}\right)=f\left(\frac{۳}{۵}\right)-f\left(\frac{۲}{۵}\right) \qquad (۳)$$

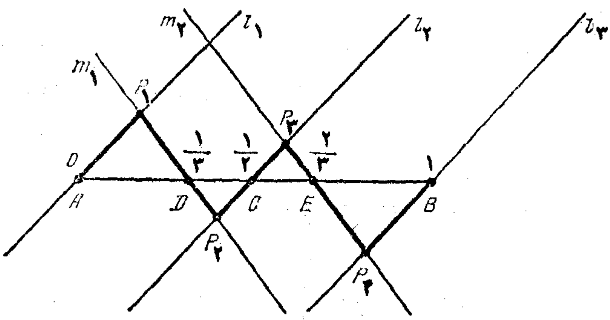
$$F\left(\frac{۳}{۵}\right)=f\left(\frac{۴}{۵}\right)-f\left(\frac{۳}{۵}\right) \qquad (۴)$$

$$F\left(\frac{۴}{۵}\right)=f(۱)-f\left(\frac{۴}{۵}\right) \qquad (۵)$$

اگربرابری‌های (۱) تا (۵) را با هم جمع کنیم، با توجه به‌شرط $f(۰)=f(۱)$، به‌دست می‌آید:

$$F(\circ)+F\left(\frac{۱}{۵}\right)+F\left(\frac{۲}{۵}\right)+F\left(\frac{۳}{۵}\right)+F\left(\frac{۴}{۵}\right)=\circ \qquad (*)$$

برابری (*) تنها در دوحالت مـی‌تواند برقرارباشد: یا هرپنج جملهٔ سمت چپ، برابرصفرباشند (که درایـن صورت مسأله حل شده است)، و یا بین ایـن پنج جمله، جمله‌هایی با علامت‌های مختلف وجود داشته باشند. فرض‌کنید $F(x_۱)$ و $F(x_۲)$، جمله‌هـایی بـا علامت‌هـای متفاوت بـاشند $\left(\circ\leqslant x_۱<x_۲\leqslant\frac{۴}{۵}\right)$. دراین صورت، بـا توجه بـه‌پیوستگی تابع $f(x)$، عدد $x_\circ$، $(x_۱<x_\circ<x_۲)$ پیدامی‌شود که، برای آن‌داشته‌باشیم: $F(x_\circ)=\circ$؛ و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت‌کنیم.



شکل ۵۴

ب) پاسخ: درست نیست، نمودار ممکن است، چنین وتری نداشته باشد.

درشکل ۵۴، مثال لازم داده شده است. ببینیم، ایـن نمودار چگونه ساخته شده است.

A و B را دوانتهای بازهٔ $[\circ،۱]$، C راوسط‌آن و D و E رانقطه‌های یك سوم این بازه می‌گیریم.

از نقطه‌های A، C و B، خط‌های راست l_1، l_2 و l_3 را (که به‌صورت مایل محور طول را قطع کرده‌اند)، موازی با هم رسم می‌کنیم؛ و از نقطه‌های D و E، خط‌های راست و موازی m_1 و m_2 را، متقاطع با سه خط راست اول، می‌کشیم. نزدیك‌ترین نقطه‌های برخورد l_1، l_2 و l_3 را با m_1 و m_2، به‌محور طول، P_1، P_2، P_3 و P_4 می‌نامیم. به‌این ترتیب، خط شکستهٔ

$$AP_1DP_2CP_3EP_4B$$

به‌دست می‌آید. ثابت می‌کنیم، این خط شکسته، مثال مورد نظرماست.

اولاً، این نمودار، متعلق به تابعی مثل $f(x)$ است که در بازهٔ $[0,1]$ پیوسته است و درضمن، $f(0)=f(1)=0$.

ثانیاً، این نمودار، وتری به طول $\frac{2}{5}$ موازی محورطول ندارد. در واقع، اگردوانتهای وترموازی محور Ox روی ضلع‌های مجاور خط شکسته باشد، روشن است که طول آن، ازطول پاره خط‌راست DE، یعنی $\frac{1}{3}$ تجاوز نمی‌کند. و اگردوانتهای وترموازی محور Ox، روی دوضلع مجاور خط شکسته نباشد (دوضلع را، یك درمیان یا دو درمیان بـه‌هم وصل کند)، آن وقت، طول آن، از طول پاره خط AC، یعنی $\frac{1}{2}$ کمتر نیست. و چون $\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$، بنابراین حکم مورد نظرما ثابت می‌شود.

∇ شبیه‌حل مسألهٔ ۷.۵، الف)، می‌توان ثابت کرد که برای تابع مفروض $y=f(x)$، با شرط‌های مسأله، وتری به‌طول $\frac{1}{n}$ موازی با محور طول وجود دارد (n، یك عدد طبیعی دلخواه است).

برای علاقه‌مندان. گزارهٔ اخیر، حالت خاصی از قضیهٔ له‌وی است: اگردریك متصلهٔ مسطحه، وتری به طول a وجود داشته باشد، آن وقت،

وتری موازی با آن، به‌طول $a\times\frac{1}{n}$ هم درآن وجود خواهد داشت (n، عدد طبیعی دلخواهی است).

ازطرف‌دیگر، برای هرعدد α، ($۰<\alpha<۱$)، که‌به‌صورت $\frac{1}{n}$ نباشد (n، عددی طبیعی است)، می‌توان شبیه حل مسألهٔ ۷.۵، ب)، نمونه‌ای از یك متصلهٔ مسطحه ساخت که وتری به‌طول واحد داشته باشد و وتری موازی با آن به‌طول α نداشته باشد.

یادآوری می‌کنیم که، برای تابع‌های پیوستهٔ نامتناوب روی خط‌راست، وضع به‌گونهٔ دیگری است: در نمودار این تابع‌ها می‌توان وتری با هرطول دلخواه پیدا کرد.

مسألهٔ ۸.۵. پاسخ: ممکن است.

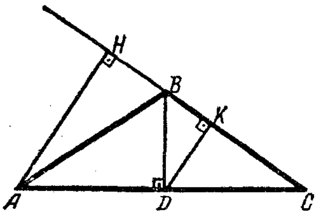
نمونه‌ای می‌آوریم. به‌عنوان مثلث اول، مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{1}{۲}$ سانتی‌متر و به‌عنوان مثلث دوم، مثلثی متساوی‌الساقین با قاعدهٔ ۲۰۰ متر و ارتفاع $۱۰^{-۷}$ متردرنظرمی‌گیریم. هرساق مثلث اخیر از نصف قاعده، یعنی از ۱۰۰ متربیشتراست و مساحت‌آن، برابر $۱۰^{-۵}$ مترمربع می‌شود، که ازمساحت مثلث اول، که برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$ سانتی‌متر مربع است، کمتراست.

مسألهٔ ۹.۵. الف) پاسخ: ممکن است.

مثالی می‌آوریم. مثلث متساوی‌الساقینی به‌قاعدهٔ ۸۰۰ سانتی‌متر و ارتفاع ۰/۳ سانتی‌متردرنظر می‌گیریم. مساحت این مثلث، برابر $\frac{۸۰۰\times ۰/۳}{۲}$ و، بنابراین، بیشتراز ۱۰۰ سانتی‌مترمربع است. ثابت‌می‌کنیم، این مثلث، با شرطهای مسأله سازگاراست.

در واقع، ارتفاع AH این مثلث، که از رأس A بر ساق BC رسم

شده، دوبرابر طول عمود DK است که از نقطهٔ D (وسط قاعده) به‌ساق BC رسم شده است (شکل ۵۵)؛ درضمن، عمود DK هم به‌نوبهٔ خود، ازمایل DB کوچکتراست. از این جا معلوم می‌شود که، ارتفاع AH از ۰/۶ سانتی‌متر کمتراست. به‌این ترتیب، همهٔ ارتفاع‌های مثلث ABC، از یك سانتی‌متر کوچکترمی‌شوند.

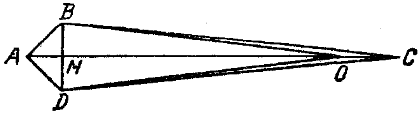


شکل ۵۵

ب) پاسخ: ممکن نیست.

چون هر ارتفاع مثلث از ۲ سانتی‌متر بیشتر است، بنابراین، طول‌هرضلع‌مثلث هم، از ۲ سانتی‌متر بیشتر می‌شودو، دراین‌صورت، مساحت‌آن از $۲ \times ۲ \times \frac{۱}{۲}$، یعنی ۲ سانتی‌مترمربع بیشتراست.

مسألهٔ ۱۰۵. درست نیست.



شکل ۵۶

مثال نقضی درشکل ۵۶ داده شده است. رأس‌های A، B و D از چهارضلعی $ABCD$ را، خیلی نزدیك به‌هم ورأس C را دورازآن‌ها انتخاب می‌کنیم. اگرنقطهٔ درونی O را نزدیك به C و دوراز A، B و D بگیریم، آن وقت، به‌مثال مورد نظرخود می‌رسیم.

برای علاقه‌مندان. پرسش کلی‌تری طرح می‌کنیم. اگرمحیط چهارضلعی را برابر P بگیریم ونقطه‌ای دلخواه در درون آن انتخاب‌کنیم، به‌ازای چه مقدارهایی از k، مجموع فاصله‌های این نقطه تا چهار رأس چهارضلعی، از

kP کمتر است.

پاسخ: به‌ازای $k \geqslant \frac{۳}{۲}$. مطلب را روشن می‌کنیم.

برای هرچهار ضلعی $ABCD$، برای این که مجموع فاصله‌های یك نقطهٔ درونی‌تاچهار رأس، به‌حداکثرمقدارخود برسد، باید این نقطه، دریکی از رأس‌های چهارضلعی قرار گیرد.

در واقع، تـابع $|AM| \rightarrow M$ (روی صفحه)، که در آن، A نقطهٔ ثابتی ازصفحه باشد، تابعی است محدب (نمودار آن، یك مخروط است)، و مجموع چهارتابع محدب

$$f(M) = |AM| + |BM| + |CM| + |DM|$$

هم تابعی محدب است. بیشترین مقدارتابع محدب، روی چندضلعی، دررأس آن، به‌دست می‌آید.

اکنون ثابت می‌کنیم، این حداکثرمقدار، از $\frac{۳}{۲}P$ کوچکتراست. فرض کنید، در رأس A، به‌این حداکثر برسیم. این نابرابری‌ها را با هـم جمع می‌کنیم:

$$|AC| < |AB| + |BC| ، \quad |AC| < |AD| + |DC|$$

به‌دست می‌آید: $۲|AC| < P$ وبه‌طورمسلم

$$۲|AC| < P + ۲(|BC| + |CD|)$$

که اگربه‌دوطرف‌این نابرابری، مجموع $۲|AB| + ۲|AD|$ را اضافه کنیم، به‌نابرابری مورد نظرمی‌رسیم:

$$|AB| + |AC| + |AD| < \frac{۳}{۲}p$$

برای هرمقدار $k < \frac{۳}{۲}$، با انتخاب

$$|MA|=|MB|+|MD|=|CO|=\varepsilon$$

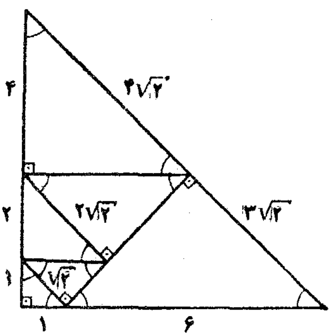
که درآن، ε عددی به‌قدر کافی کوچك است، می‌توان‌مثال نقضی‌ساخت (شکل ۵۶).

این مطلب را هم یادآوری کنیم که، جست‌وجوی نقطه‌ای در درون چهارضلعی با حداقل مجموع فاصله‌های آن از رأس‌ها، چندان دشوار نیست: این نقطه، درمحل برخورد قطرها قرار دارد.

مسألهٔ ۱۱۰۵. پاسخ: می‌توان.

درشکل ۵۷، روش تقسیم یك مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، با ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ برابر ۷ سانتی‌متر، به ۶ مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین مختلف و متشابه، نشان داده شده است.

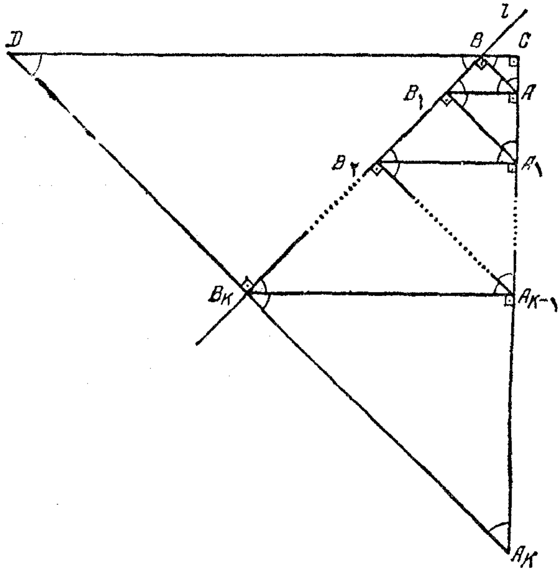
∇ این گزاره هم، درست است: هر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین را می‌توان به $(n\in\mathbf{N})n>۱۰$ مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین مختلف و متشابه با یکدیگر، تقسیم کرد.



شکل ۵۷

ابتدا ثابت می‌کنیم، می‌توان آن را به $۲k$ بخش $(k\in\mathbf{N}\text{ ،}k\geqslant ۳)$ تقسیم کرد. از مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC $(\hat{C}=۹۰^\circ)$ آغازمی‌کنیم. ضلع‌های مجاوربه‌زاویهٔ قائمهٔ آن را، CA و CB می‌گیریم و خط راست l را، از رأس B، عمود بر وتر رسم می‌کنیم (شکل ۵۸).

خط‌شکستهٔ $AB_۱A_۱B_۲A_۲B_۳\ldots B_kA_k$ را به‌نحوی می‌سازیم که، همهٔ ضلع‌های B_iA_i ازآن موازی AB، و همهٔ ضلع‌های $A_iB_{i+۱}$ آن موازی خط راست BC باشند؛ سپس، از آخرین ضلع خط شکسته، یعنی B_kA_k، خط راستی می‌گذرانیم تا خط راست BC را در D قطع کند. به‌سادگی دیده



شکل ۵۸

می‌شود که، به‌این ترتیب، مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین DCA_k، به $2k+2$ مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، که دو به‌دو مختلف ومتشابه‌اند، تقسیم شده است (حالت خاص این ساختمان، به‌ازای $k=2$، درحل مسألهٔ ۱۱.۵، آمده است).

در زنجیرهٔ مثلث‌های ACB، BAB_1، AB_1A_1، $A_1B_1B_2$، $B_2A_1A_2$، ...، $A_{k-1}B_kA_k$، هر مثلث با مثلث قبلی خود، با ضریب تشابهی برابر $\sqrt{2}$، متشابه است (وتر مثلث قبلی، با ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث بعدی، برابراست). بنابراین، در دنبالهٔ پاره خط‌های راست CA، AA_1، A_1A_2، ...، $A_{k-1}A_k$، هرپاره خط، طولی دو برابرطول پاره خط قبلی خود دارد. به این ترتیب، روشی عملی، برای تقسیم مثلث مفروض به صورت مورد نظر، به‌دست می‌آید.

فرض کنید، بخواهیم مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ به طول a را، به ۲ + $۲k$ بخش تقسیم کنیم. از رأس زاویهٔ قائمه وروی ضلع مجاوربه‌زاویهٔ قائمه، به‌ترتیب پاره‌خط‌های راستی به‌طول $\frac{a}{۲^k-۱}$ ، $\frac{۲a}{۲^k-۱}$ ، $\frac{۴a}{۲^k-۱}$ ،...، $\frac{۲^{k-۱}a}{۲^k-۱}$ جدامی‌کنیم (ازآن‌جاکه مجموع $۱+۲+\ldots+۲^{k-۱}$ برابر $۲^k-۱$ است، این تقسیم، ممکن است). نقطه‌های حاصل، همان رأس‌های A ، $A_۱$ ، $A_۲$ ،...، A_k ازخط‌شکسته‌ای هستند که درساختمان قبلی، ازآن یادکردیم.

به‌این‌ترتیب، می‌توان، به‌ازای $k\geqslant۳$، مثلث رابه $۲k$ بخش، تقسیم کرد. چون کوچکترین مثلث حاصل را می‌توان، با همین روش، دوباره به ۶ بخش تقسیم کرد، مـی‌توانیم مثلث اصلی را به $۲k+۵l$ بخش تقسیم کنیم که، درآن، k عددی طبیعی بزرگتراز ۳، و l هرعدد درست غیرمنفی است. ولی، هرعدد درست بزرگتر از ۱۰ را می‌توان به‌این‌صورت نوشت که درستی گزارهٔ ما را، تأیید می‌کند.

تنها ایـن می‌ماند که امکان تقسیم مثلث را، برای $n\leqslant۵$، $n=۷$ و $n=۹$ بخش، ثابت کنیم. حل این حالت‌ها را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

مسألهٔ ۱۲۰۵. پاسخ: می‌توان.

این ساختمان را، که بـه‌کمك ۹ نخ می‌توان انجام داد، درشکل ۵۹ مثالی داده‌ایم. برای‌آماده‌کردن‌آن، می‌توانید به‌جای میله، ازمداد استفاده کنید.

اگرهرکدام‌ازنخ‌ها طولی برابر l وهرکدام‌ازمیله‌ها طولی‌برابر d داشته باشند، برای محکم و پایداربودن ساختمانی که درشکل ۵۹ نشان داده‌ایم، باید داشته باشیم:

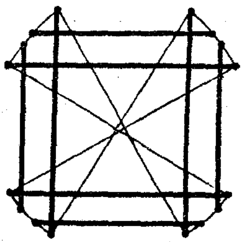
$$d=l\sqrt{۱+\frac{۲}{\sqrt{۳}}}\approx۱/۴۷l \qquad (۱)$$

درساختمان‌ما، انتهای‌میله‌ها، دومثلث متساوی‌الاضلاع را می‌سازند. این مثلث‌ها، درصفحه‌های عمود برخط راستی قراردارند که مرکزهای آن‌ها

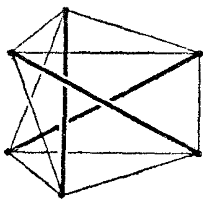
را به‌هم وصل می‌کند و، نسبت به‌هم، به اندازهٔ زاویه‌ای چرخیده‌اند. خود میله‌ها، روی خطهای راستی قراردارندکه دوبه‌دونسبت به‌هم متنافرند.

▽ اتصال میله‌ها و نخ‌ها درشکل ۵۹، شبیه یك هشت وجهی انجام می‌شود (گراف هشت وجهی را درشکل ۶۶ ازمسألهٔ ۱۵.۵ ببینید). اثبات وجود ریاضی این ساختمان، یعنی اثبات‌کافی بودن شرط (۱)، دشواراست.

این ساختمان را، ب.فوبر، درسال‌های ۶۰ پیدا کرد. ولی بعد از او، مجموعه‌ای از ساختمان‌های مختلف از این‌گونه، درست شد. مؤلفان‌کتاب حاضر، ضمن‌تهیهٔ‌کتاب، این‌مسأله راطرح‌کرده‌اند: ساختمان فضایی پایداری ازمیله‌ها و نخ‌ها درست‌کنید، بـه‌نحوی‌که میله‌ها با هم تماس نداشته باشند و هرانتهای یك میله، درست به دونخ متصل باشد. طرحی ازاین ساختمان، درشکل ۶۰ داده شده است.



شکل ۶۰

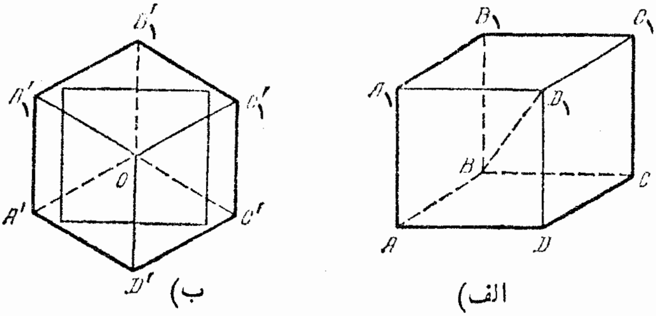


شکل ۵۹

مسألهٔ ۱۳۰۵. پاسخ: می‌توان.

مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ به‌یال برابر a (شکل «۶۱ - الف») را ببینید) و شش ضلعی فضایی $AA_1B_1C_1CDA$ را درنظرمی گیریم (رأس‌های این شش ضلعی، روی یك‌صفحه نیستند). ازمیان این شش ضلعی (وبنابراین، ازمیان مکعب) می‌توان مکعب به‌ضلع a را، آزادانه عبورداد.

برای روشن شدن مطلب، تصویر مکعب را روی صفحهٔ عمود برقطر BD_1 آن، در شکل ۶۱، ب) نشان داده‌ایم. به‌دلیل متقارن بودن مکعب،



شکل ۶۱

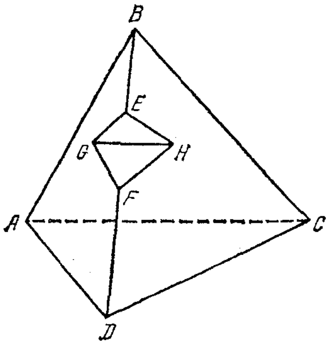
این تصویر، شش‌ضلعی منتظم $A'A'_1B'_1C'_1C'D'$ خواهد بود که، درآن، A' تصویر نقطهٔ A، A'_1 تصویر نقطهٔ A_1 است و غیره. به‌این‌ترتیب، دورهٔ این شش‌ضلعی منتظم، تصویر شش‌ضلعی فضایی $AA_1B_1C_1CD$ می‌شود وتصویر دوانتهای BD_1 ـ قطر مکعب ـ بر نقطهٔ O، مرکز شش ضلعی منتظم قرار می‌گیرد.

چون سینوس زاویهٔ بین هریال مکعب با قطر آن، برابر $\sqrt{\frac{2}{3}}$ است، ضلع شش‌ضلعی منتظم، برابر $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ وشعاع دایرهٔ محاطی‌آن، برابر $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (نصف قطر مربع به ضلع a) می‌شود. بنابراین می‌توان مربع به‌ضلع a را، به‌طور کامل در شش‌ضلعی جا داد، به‌نحوی که مرکز آن درنقطهٔ O باشد و، درضمن، هیچ‌گونه برخوردی با ضلع‌های شش ضلعی پیدا نکند، آن طور که در شکل «۶۱ ـ ب» دیده می‌شود.

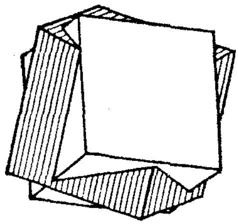
ازاین جا نتیجه می‌شود که، اگرمکعب به‌ضلع a را طوری قراردهیم که وجه پایینی‌آن، برمربع شکل «۶۱ ـ ب» منطبق، و قطرمکعب عمود بر صفحهٔ شش‌ضلعی باشد، آن‌وقت، مکعب، با ضلع شش‌ضلعی، تماسی نخواهد داشت. واین، به‌معنای آن است که می‌توان مکعب را، از درون شش‌ضلعی فضایی در طول قطر BD_1 عبور داد.

به‌این‌ترتیب، می‌توان درمکعب چوبی‌سوراخی ایجاد کرد، که‌مکعبی برابرآن، ازطریق این سوراخ، عبور کند (شکل ۶۲ را ببینید).

▽ ازاستدلال‌بالاروشن می‌شود که، حتی می‌توان، مکعبی بااندازه‌های اندکی بـزرگتراز مکعب مفروض را، از آن عبورداد. در واقـع طول یال مکعبی‌که باید از مکعب به یال a عبور کند، بایدکمتراز a $(\sqrt{۳}-۱)\sqrt{۲}$ باشد.



شکل ۶۳



شکل ۶۲

مسألهٔ ۱۴۰۵. پاسخ: وجود دارد.

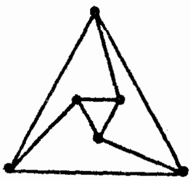
در شکل ۶۳، نمونه‌ای از ایـن چند وجهی داده شده است. این چند وجهی را، به‌ترتیب‌زیر، می‌توان به‌دست‌آورد: روی یالBD ازچهاروجهی $ABCD$ «اطاقـکی» از دومثلث GEH و GFH ایجاد می‌کنیم. این چند وجهی، دارای ۸ رأس، ۶ وجه و ۱۲ یال است.

▽ درچند وجهی شکل۶۳، دو وجه شش ضلعی وجود داردکه، دردو یال BE و FD مشترك‌انـد. چنین موقعیتی، برای چند وجهی‌های محدب وجود ندارد: درچند وجهی محدب، هر دو وجه نمی‌توانند بیش از یك یال مشترك داشته باشند.

مسألهٔ ۱۵۰۵. الف) پاسخ: می‌توان.

نمونهٔ جواب درشکل ۶۴ داده شده است.

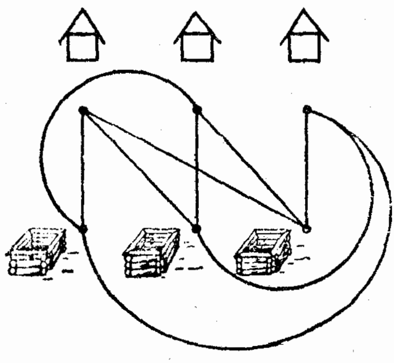
▽ این مسأله، مسألهٔ معروف «خانه‌ها وچاه‌ها» را به خاطر می‌آورد:
آیا می‌توان در روی صفحه، نه‌جاده طوری کشید که یکدیگر را قطع نکنند و هریك ازسه «خانه» را، به‌هریك از سه «چاه» مربوط نمایند؟ دراین شبکهٔ جاده‌ها هم (مثل مسألهٔ ۱۵.۵) شش رأس وجود دارد و ازهر رأس، سه‌خط خارج شده است (شکل ۶۵). باوجود این، پاسخ به‌پرسش «خانه‌ها و چاه‌ها» منفی‌است: چنین‌شبکه‌ای را نمی‌توان رسم کرد.



شکل ۶۴

کلید اثبات این حکم، قضیهٔ اولر است: فرض‌کنید n، تعداد رأس‌ها؛ m، تعداد پاره خطهای بین برخی از این رأس‌ها و f، تعداد چند ضلعی‌هایی باشد که درصفحه به وسیلهٔ این پاره خطها، ایجاد شده است؛ در این صورت داریم:

$$n+f=m+۱$$

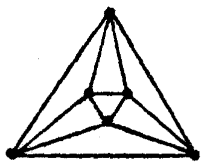


شکل ۶۵

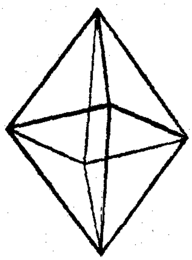
برای علاقه‌مندان. این قضیه هم درست است (واگنر، فاری، شتاین): اگر گراف را بتوان روی صفحه، بدون برخورد، نشان داد، آن‌وقت می‌توان آن را روی صفحه طوری نشان داد که همهٔ یال‌های آن، پاره خط‌های راست باشند. شرط لازم و کافی برای مسطح بودن گراف را، قضیهٔ پون‌تریاگین-کوراتووسکی بیان می‌کند: وقتی وتنها وقتی می‌توان گراف‌را، بدون تقاطع، در صفحه نشان داد که شامل زیرگرافی همان گراف با شش رأس از نوع «خانه‌ها ـ چاه‌ها» ویا گراف کاملی با پنج‌رأس (پنج نقطه‌ای که دو به‌دو به‌هم وصل شده‌اند) نباشد.

ب) پاسخ: می‌توان.

مثالی درشکل ۶۶ داده شده است. می‌توان تصور کرد که، دراین جا، یك هشت وجهی ساخته شده با سیم نشان داده شده است (شکل ۶۷) که عکس‌آن‌را ازنقطه‌ای واقع درنزدیکی مرکز یکی از وجه‌های آن، گرفته‌اند.



شکل ۶۶

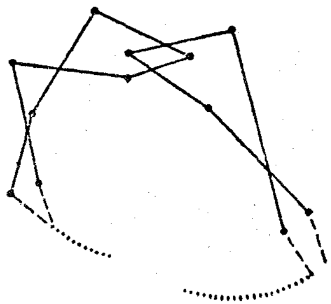


شکل ۶۷

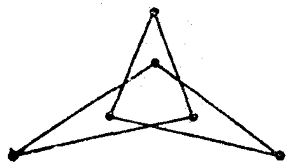
مسألهٔ ۱۶۰۵. الف) پاسخ: وجود دارد.

نمونهٔ جواب درشکل ۶۸ داده شده است.

∇ برای هر $n \geqslant 6$، به شرط زوج بودن عدد n، می‌توان خط شکستهٔ بسته‌ای پیدا کرد که شامل n ضلع باشد و هرضلع خود را درست یك‌بار قطع کرده باشد. نمونهٔ خط شکسته، برای $n=6$ را، قبلاً دیدیم. برای $n \geqslant 8$، بخشی ازساختمان چنین خط شکسته‌ای، درشکل ۶۹ نشان داده شده است



شکل ۶۹



شکل ۶۸

(قانون ساختمان بخش باقی مانده روشن است).

ب) پاسخ: وجود ندارد.

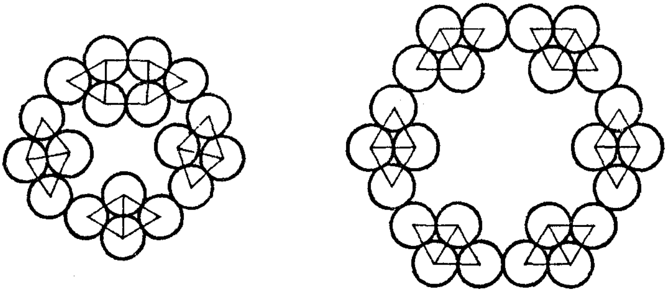
فرض می‌کنیم توانسته باشیم، چنین خط شکسته‌ای را بسازیم. یکی از نقطه‌های برخورد با خودش را در نظر مـی‌گیریم. دو ضلع دراین نقطه یکدیگر را قطع کرده‌اند و در ضمن، ایـن دوضلع، با ضلع‌های دیگری (البته به‌جز در رأس‌ها) نقطهٔ برخورد ندارند. بنابراین، همهٔ ضلع‌های خط شکسته را می‌توان به‌زوج‌هایی تقسیم کرد که متناظر با نقطه‌های برخورد با خودش باشند. به‌این ترتیب، تعداد ضلع‌هـای خط شکسته، زوج است و نمی‌تواند برابرهفت باشد.

∇ این استدلال نشان می‌دهد که، به طور کلی، خط شکستهٔ بسته‌ای با تعداد فرد ضلع‌ها وجود ندارد که هر ضلع خود را، درست یك بار قطع کرده باشد.

مسألهٔ ۱۷۰۵. پاسخ: الف) می‌توان؛ ب) نمی‌توان.

الف) درشکل «۷۰ ــ الف» نشان داده‌ایم، به‌چه ترتیب می‌توان ۲۴ سکه را چید. شیوهٔ عمل را روشن می‌کنیم.

شعاع سکه را R مـی‌گیریم. مرکزهای هرچهارسکه را در رأس‌های یك لوزی به‌ضلع $2R$ قرارمی‌دهیم (قطرکوچکترلوزی هم، برابر $2R$ است).



الف) ب)

شکل ۷۵

سپس، این مجموعه‌های چهارسکه‌ای را، در جهت قطر بزرگتر لوزی‌ها، به‌هم نزدیك می‌کنیم (شکل ۷۵ ـ الف).

ب) فرض می‌کنیم توانسته باشیم، ۲۵ سکه را طبق خواست مسأله روی صفحه چیده باشیم و، سپس، خود را به‌تناقض می‌رسانیم.

روی محیط هرسکه، سه‌نقطه‌ای را که در آن‌ها، با سه دایرهٔ دیگر مماس است، علامت می‌گذاریم. تعدادکل این نقطه‌ها را، با دو روش، محاسبه می‌کنیم. ازیك طرف، تعداد این نقطه‌ها باید زوج باشد، زیرا هردو نقطهٔ علامت‌دار، به عنوان نقطهٔ تماس دو دایره، برهم منطبق‌می‌شوند. از طرف دیگر، تعداد این نقطه‌ها فرد است، زیرا ۲۵ دایره داریم و روی هر دایره ۳ نقطه را علامت گذاشته‌ایم. تناقض حاصل، حکم مورد نظر ما را ثابت می‌کند.

∇ جالب است روشن‌کنیم، به ازای چه‌مقدارهایی از k، نمی‌توان تعداد محدود سکهٔ گرد برابر، طوری روی صفحه قرارداد که، هرسکه، بر k سکهٔ دیگرمماس باشد؟ ثابت می‌کنیم که k، نمی‌تواند از ۳ بزرگترباشد.

فرض می‌کنیم، سکه‌های گرد برابر را، روی صفحه طوری چیده‌باشیم که، هرکدام ازآن‌ها، بر k سکهٔ دیگرمماس باشد. مرکزهای همهٔ سکه‌ها را علامت می‌گذاریم و پوستهٔ محدب آن را ـ که یك چند ضلعی محدب است ـ

درنظرمی‌گیریم. اگر A و B و C را، سه‌رأس متوالی‌آن بگیریم، زاویهٔ ABC از ۱۸۰ درجه کمتر می‌شود. فرض کنید، سکهٔ به‌مرکزِ B، برسکه‌های به‌مرکزهای O_1،O_2،...،O_k مماس باشد (مرکزها را به‌ردیف دوران دور نقطهٔ B و دریکی ازدوجهت ممکن، درنظربگیرید). به‌سادگی معلوم‌می‌شود که هر یك از زاویه‌های O_1BO_2، O_2BO_3،...،$O_{k-1}BO_k$، از ۶۰ درجه کمترنیست. ازاین جا نتیجه می‌شود:

$$k.60^\circ \leqslant 180^\circ \Rightarrow k \leqslant 3$$

اکنون ثابت می‌کنیم، به‌ازای $k=3$، می‌توان سکه‌ها را، به‌شرطی که تعدادآن‌ها زوج و به‌قدر کافی باشد، طوری روی صفحه چید که هر سکه برسه‌سکهٔ دیگرمماس باشد. برای‌این‌منظور، بهتراست‌ازدونوع مجموعه‌های آماده استفاده‌کنیم: «لوزی» شامل چهارسکه و «فانوس» شامل شش سکه.

باچهارلوزی، زنجیره‌ای‌از۱۶ سکه‌آماده‌می‌شود. درشکل «۷۰ ـ ب» نشان داده‌شده است که، چگونه می‌توان با «لوزی‌ها» و «فانوس‌ها»، زنجیرهٔ بسته‌ای شامل ۱۸ سکه ساخت. هر عدد زوج بزرگتر از ۱۸ را می‌توان به‌صورت $4n+6m$ نوشت؛ یعنی با هرتعداد زوج سکه‌ها (بیشتر از ۱۸)، می‌توان به کمك ترکیبی از «لوزی‌ها» و «فانوس‌ها»، زنجیرهٔ مورد نظر را به‌دست‌آورد.

طرح پرسش‌مشابه درفضا وبرای‌کره‌های برابر، می‌توانند جالب‌باشد. درسال ۱۹۵۳ ثابت شدکه، به‌هرکره درفضا، نمی‌توان بیش از۱۲ کرهٔ برابر با آن، متصل کرد.

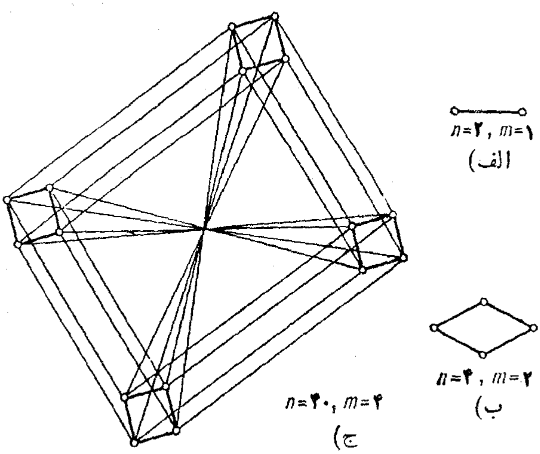
مسألهٔ **۱۸۰۵.** پاسخ: ممکن است.

هرنفر را متناظر با یك نقطه، و افراد مختلف را متناظربا نقطه‌های مختلف می‌گیریم. اگردو نفر با هم آشنا باشند، نقطه‌های متناظرآن‌ها را، به‌وسیلهٔ یك پاره‌خط راست، به هم وصل می‌کنیم. دراین صورت، مسأله را می‌توان به‌این صورت طرح کرد: آیا طرحی وجود داردکه درآن، مثلث وجود نداشته باشد و، هردو نقطه، یا به‌وسیلهٔ پاره خط راستی به‌هم وصل

شده باشند، و یا رأس‌های روبه‌رو، تنها دریك چهارضلعی باشند؟

درشکل «۷۱ ـ الف وب»، دونمونهٔ ساده ازاین طرح داده شده‌است. درشکل «۷۱ ـ ج»، طرحی شامل ۱۶ نفر و ۴۰ پاره خط راست داده شده است که با شرطهای مسأله سازگار است. برای این که سازگاری شرطهای مسأله را با این طرح روشن کنید، می‌توانید ازتقارن شکل استفاده‌کنید.

▽ جالب است که شرح پیکربندی مسألهٔ ۱۸.۵ را می‌توان به‌عنوان مجموعهٔ رأس ها، یال‌ها و قطرهای بزرگ مکعب چهاربعدی توضیح داد.



شکل ۷۱

می‌توان‌ثابت کرد که، با شرطهای مسألهٔ ۱۸.۵، دراین‌اجتماع، تعداد آشناهای هرفرد، باتعدادآشناهای هرفرد دیگر، برابراست. مجموعهٔ‌آشناهای A را، دراین‌اجتماع، باM_Aومجموعهٔ افرادناآشنا را با N_A نشان می‌دهیم. به‌این ترتیب، هرعضو N_A را می‌توان بـا دو عضو M_A (آن‌هایی که با او آشنا هستند) متناظرکرد. به‌سادگی می‌توان ثابت‌کردکه، متناظربین مجموعهٔ N_A ومجموعـهٔ همهٔ زوج عضوهای ممکن M_A، تناظـری یك به‌یك است. بنابـرایـن، اگـر M_A دارای m_A عضـو بـاشد، آن وقـت، N_A، دارای

$(\text{۱}-m_A)m_A\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ عضو خواهد بود؛ و تعداد کل کسانی که دراین اجتماع شرکت کرده‌اند، چنین می‌شود:

$$n=\text{۱}+m_A+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}m_A(m_A-\text{۱})$$

این برابری، برای هرشخص A، برقراراست. ولی معادلهٔ

$$\text{۱}+x+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x(x-\text{۱})=n$$

برای $n>\text{۱}$، تنها یك جواب مثبت دارد، یعنی تعداد m_A برای همهٔ Aها، یکی است.

پاسخ کامل به‌این پرسش راکه، به‌ازای‌چه‌مقدارهایی‌از n چنین اجتماعی وجود دارد، نمی‌دانیم. همان‌طور که ثابت کردیم

$$n=\text{۱}+m+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}m(m-\text{۱})$$

که درآن، m عبارت است ازتعداد آشناهای هرفرد. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که، چنین اجتماعی، برای $m=\text{۳}$، $m=\text{۴}$ و $m=\text{۴}k+\text{۳}$، $(k\in\mathbb{N})$ وجود ندارد. همهٔ نمونه‌هایی ازاین‌گونه اجتماع‌را، که برای ما معلوم‌بوده است، درشکل «۷۱ ـ الف وب وج» نشان داده‌ایم.

مسألهٔ ۱۹۰۵. پاسخ: ممکن است.

روی شکل ۷۲، نتیجهٔ همهٔ بازی‌های این سه شطرنج باز نشان داده شده است؛ به‌نحوی که با شرطهای مسأله سازگارباشند. درآن، هردونفر، ۷ دوربا هم بازی کرده‌اند و درضمن:

ـ اولی از دومی دوباربرده است؛

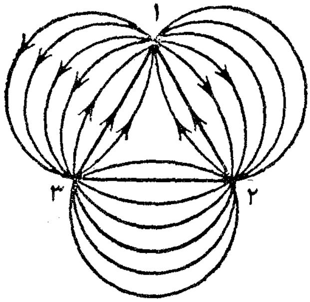
ـ دومی از اولی دوباربرده است؛

ـ اولی ازسومی سه‌باربرده است؛

ـ سومی از اولی چهارباربرده است؛

ـ بقیهٔ بازی، مساوی شده است.

دراین مسابقه، اولی ۶/۵ امتیاز، دومی ۷ امتیاز و سومی ۷/۵ امتیازآورده‌اند. درضمن، برد اولی از همه بیشتر است: ۵ دور؛ باخت دومی از همه کمتراست: ۲ دور؛ ولی سومی بیش ازهمه امتیازآورده است.



شکل ۷۲

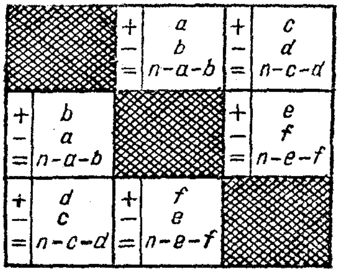
∇ می‌توان جدول مسابقه را تشکیل داد (شکل ۷۳): همهٔ بردها (+)، باخت‌ها (−) و مساوی‌ها (=) را با حرف نشان می‌دهیم و شرط‌های مسأله را می‌نویسیم. دستگاهی از نامعادله‌های خطی به‌دست می‌آید که، در آن، تعداد مجهول‌ها ازتعداد نامعادله‌ها بیشتراست. حل مسألهٔ ۱۹.۵ نشان می‌دهد که، این دستگاه، درمجموعهٔ عددهای طبیعی، دست کم یک جواب دارد. البته، این جواب، منحصربه‌فرد نیست و جالب است که همهٔ جواب‌ها را پیدا کنیم.

مسألهٔ ۲۰.۵. پاسخ: می‌توان.

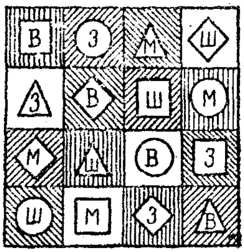
درشکل ۷۴، جواب را داده‌ایم. دراین شکل، رنگ‌های مختلف، با هاشورهای مختلف نشان داده شده است.

∇ وقتی که n علامت مختلف در یک جدول $n \times n$، طوری نوشته شده باشند که هرسطر و هرستون، شامل همهٔ علامت‌های مختلف باشند، گویند، یک مربع لاتینی داده شده است. دومربع لاتینی A و B را، عمودبر هم گویند، وقتی که درخانه‌هایی ازمربع A که علامت iام وجود دارد، در مربع B، علامت‌های مختلف وجود داشته باشد (و به‌همین ترتیب، برای $i = ۱، ۲، \ldots، n$).

مسألهٔ ما این است که، سه‌مربع لاتینی ۴ × ۴ و دوبه دوعمود برهم بسازیم (یکی رنگ‌ها را می‌دهد، دیگری شکل کادرها و سومی حرف‌ها را).



شکل ۷۳



شکل ۷۴

برای علاقه‌مندان. برای تشکیل این‌گونه جدول‌های مربعی (که در مسأله‌های عملی، و مثلاً برای برنامه‌ریزی آزمایش‌های مختلف، کاربرد فراوان دارد)، بهتر است از مفهوم صفحهٔ آفینی محدود استفاده کنیم.

F را میدانی محدود، از q عضو می‌گیریم؛ زوج (x,y) از عضوهای F را نقطه‌های صفحهٔ آفینی محدود، و مجموعه‌های به‌صورت

$$\{(x,y): ax+by+c=0\}$$

را، خط‌های راست می‌نامیم ($a,b,c\in F$؛ درضمن a و b با هم صفر نیستند).

روی هم q^2 نقطه و $q(q+1)$ خط راست به‌دست می‌آید؛ درضمن، این خط‌های راست، به $(q+1)$ خانواده طوری تقسیم می‌شوند که، در هر خانواده، درست q خط راست «موازی» باهم وجود دارد و از هر نقطه، $(q+1)$ خط راست می‌گذرد.

مثلاً، یکی از خانواده‌ها، عبارت است از خط‌های راست $x+c=0$، دیگری $y+c=0$، سومی $-x+y+c=0$، چهارمی $x+2y+c=0$ (به‌شرط $q>2$) و غیره.

در برابر هر یک از $q+1$ خانواده، ویژگی معینی را قرار می‌دهیم: «شمارهٔ ستون»، «شمارهٔ سطر»، «حرف»، «شکل کادر» و غیره. به‌نقطه‌های هر یک از q خط راست خانوادهٔ اول شمارهٔ معینی از سطر، به‌نقطه‌های هریک از

خانوادهٔ دوم، شمارهٔ معینی ازستون، به‌خانوادهٔ سوم، «حرف»، به چهارمی «کادرشکل» وغیره می‌دهیم. دراین‌صورت، روشی به‌دست می‌آیدکه بتوانیم بفهمیم، درچه‌خانهٔ جدول $q \times q$، هریك ازنقطه‌های (x, y) را قرار دهیم، چه‌رنگی داشته باشد،کدام حرف باشد وغیره. هردو خط راست غیرموازی، یکدیگررا درنقطه‌ای قطع‌می‌کنند، به‌نحوی‌که، برای هردوویژگی مفروض، درست یك خانه پیدا می‌شودکه دو ویژگی موردنظر را دارد.

به ازای $q=۴$، میدان محدودی از عنصرهای ۰، ۱، a و b وجود داردکه منجربه‌حل مسألهٔ ما می‌شود. جدول‌های‌جمع وضرب، دراین میدان را، در زیردادهایم.

+	۰	۱	a	b
۰	۰	۱	a	b
۱	۱	۰	b	a
a	a	b	۰	۱
b	b	a	۱	۰

∘	۰	۱	a	b
۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	a	b
a	۰	a	b	۱
b	۰	b	۱	a

مسألهٔ ۰۳۱۰۵ الف) پاسخ: ۴ یا ۶ روند.

ازشرط مسأله معلوم می‌شودکه، عضوهای‌انجمن ریاضی، یا دونفری ویا سه نفری، به‌کافه می‌روند.

اگرهربار‌دونفری به کافه بروند، باید ۶ روندکار وجود داشته باشد. در واقع، اگرافراد را، از ۱ تا ۴، شماره‌گذاری‌کنیم، تنها به‌این ترتیب می‌توانند به‌کافه مراجعه‌کنند:

$$(۱،۲);(۱،۳);(۱،۴);(۲،۳);(۲،۴);(۳،۴)$$

درحالتی‌که در مراجعهٔ اول به کافه، سه نفر با هم باشند، برای مراجعه‌های بعدی، تنها به‌این سه‌طریق می‌توانند عمل‌کنند: هربار، هر یك ازاین سه‌نفربا نفرچهارم.

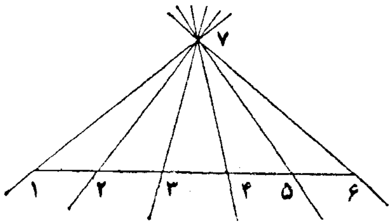
ب) پاسخ: دونوع برنامه می‌توان تنظیم کرد:

(۶،۷)؛(۵،۷)؛(۴،۷)؛(۳،۷)؛(۲،۷)؛(۱،۷)؛(۱،۲،۳،۴،۵،۶)

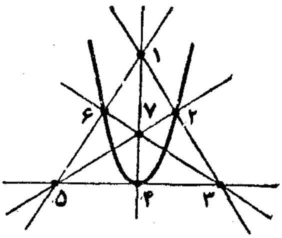
و یا

(۳،۴،۵)؛(۳،۶،۷)؛(۲،۴،۶)؛(۲،۵،۷)؛(۱،۵،۶)؛(۱،۴،۷)؛(۱،۲،۳)

این موقعیت‌ها را مـی‌توان به صورت گراف نشان داد. برنامهٔ اول، روی شکل «۷۵ ـ الف» نشان داده شده است: خـط راست افقی، متناظر با نخستین مراجعه به کافه، و خطهای راستی که نقطهٔ ۷ را به‌نقطه‌های دیگر وصل کرده است، متناظربا مراجعه‌های بعدی است.



الف)



ب)

شکل ۷۵

برنامهٔ دوم رادرشکل «۷۵ ـ ب» نشان داده‌ایم. دراین گراف، هرخط (راست یا منحنی) متناظربا یك مراجعهٔ بـه کافه است؛ هرخط، سه‌شماره را به‌هم وصل کـرده است، و نشان می‌دهدچه کسانـی با هم بـه کافه مراجعه می‌کنند.

▽ پرسش‌های کلی زیر، به‌این مسأله مربوط‌اند.

فرض کنید در مجموعهٔ E کـه شامل n عضو است، m زیرمجموعهٔ مختلف، به‌جزخود E، جداکرده باشیم، به‌نحوی‌که برای‌هردوعضو از E، درست یك زیرمجموعه پیدا شودکه شامل این‌دوعضوبا هم باشد.

آیا ممکن است $m<n$؟ درچه حالتی $m=n$ پیش می‌آید؟

برای علاقه‌مندان. ثابت می‌کنیم، همیشه $m \geqslant n$. عضوهای مجموعهٔ E را a_1، a_2، a_3،...،a_n و زیـر مجموعـه‌های جدا شده از آن را، A_1، A_2،...،A_m می‌نامیم.

هرعضو a_i را، متناظر با بردار m بعدی

$$\mathbf{a}_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{im})$$

به ایـن ترتیب قـرار می‌دهیم که: اگر عضو a_i در مجموعهٔ A_j وارد نشده است، آن وقت $\lambda_{ij} = 0$؛ و اگر a_i عضوی از A_j است،آن وقت $\lambda_{ij} = 1$.

ازشرط نتیجه می‌شود که، حاصل‌ضرب داخلی (اسکالر) هردو بردار از این گونـه، برابر واحـد است، یعنی $(\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j) = 1$ (برای $i \neq j$)؛ ومجذور اسکالربردار، از ۲ کمترنیست (زیرا، هرعضو، دست کم، متعلق به ۲ مجموعه است).

اکنون فرض می‌کنیم: $m < n$. چـون تعداد n بـردار $\mathbf{a}_i$ از بعدیت فضای m بیشتر است، دستگاه بـردارهای $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{a}_2$،...،$\mathbf{a}_n$ به صورت خطی باهم بستگی دارند، یعنی معادلهٔ

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = 0$$

دارای جواب غیرصفراست. اگردوطرف این معادله را، به‌ترتیب، دربردارهای $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{a}_2$،...،$\mathbf{a}_n$ ضـرب اسکالـر کنیم، بـه‌این دستگاه از معادلـه‌های خطی می‌رسیم:

$$b_1x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$

$$x_1 + b_2x_2 + \ldots + x_n = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + b_nx_n = 0$$

که درآن‌ها $b_i \geqslant 2$. ولی ایـن دستگاه، تنها جواب صفردارد (دترمینان آن، مخالف صفراست) که با فرض ما متناقض است. به‌این ترتیب $m \geqslant n$.

برای برابری $m=n$، لازم و کافی است، یکی از دو حالت زیر را داشته باشیم:

۱) در یکی از زیرمجموعه‌های جدا شده، همهٔ عضوهای E، به‌جزیکی، وارد شده باشند؛ و بقیهٔ زیرمجموعه‌ها، هر کدام شامل دو عضو باشد، یکی عضو باقی مانده‌ای که در زیرمجموعهٔ اول وارد نشده بود و دیگری یکی از عضوهای زیرمجموعهٔ اول؛

۲) عدد n را بتوان به صورت $l(l-1)+1$ نشان داد؛ هر زیرمجموعهٔ جدا شده، شامل l عضو باشد و هرعضو مجموعهٔ E، درست به l زیرمجموعه، تعلق داشته باشد.

یادآوری می‌کنیم که هنوز این مسأله حل نشده است که چه‌زمانی، حالت ۲ تحقق پیدا می‌کند. دستگاه زیرمجموعه‌های مجموعهٔ E از تعمیم ∇، به‌شرطی که با شرط ۲) سازگار باشد، نام ویژه‌ای دارد: صفحهٔ تصویری محدود از مرتبهٔ $q=l-1$.

نشان می‌دهیم که، چگونه می‌توان صفحهٔ تصویری محدود از مرتبهٔ $q=p^k$ (برای $n=p^{2k}+p^k+1$) را ساخت (p، عددی اول است). برای این منظور، باید از «عددهای» میدان محدود مرتبهٔ p^k استفاده کرد.

صفحهٔ خودمان را به‌وسیلهٔ «عددهای» سه‌گانهٔ (x_1, x_2, x_3)، نقطه‌ای می‌نامیم و آن را، با دقت تا متناسب بودن «عددها» در نظر می‌گیریم (یعنی (x_1, x_2, x_3) و (cx_1, cx_2, cx_3)، یك نقطه را معین می‌کنند). قرار می‌گذاریم که $(0, 0, 0)$ را، نقطه به‌حساب نیاوریم.

خط راست، به‌وسیلهٔ «عددهای» سه‌گانهٔ (a_1, a_2, a_3) [البته، به‌جز $(0, 0, 0)$] داده می‌شود که باز هم با دقت تا متناسب بودن درنظر گرفته می‌شوند. نقطهٔ (x_1, x_2, x_3)، تنها وقتی به‌خط راست (a_1, a_2, a_3) تعلق دارد که داشته باشیم:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$$

روشن است که این صفحهٔ تصویری، حالت ۲ را نتیجه می‌دهد. در ضمن، نقطه‌های صفحه، عضوهای مجموعهٔ E هستند و خط‌های راست، زیرمجموعه‌های جدا شده. تعداد نقطه‌ها، با تعداد خط‌های راست برابر است

وهردو نقطه، تنها به یکی از خطهای راست تعلق دارند.

به‌ازای $q=۲$، همان نمونه‌ای ازصفحهٔ تصویری مرتبهٔ ۲ است که درشکل «۷۵ـ ب» نشان داده شده است.

درحالت «ب» ازمسألهٔ ۲۱.۵، دستگاه لازم مجموعه‌ها، برای حالت $l=۳$ و $n=۷$ ساخته شده بود.

برای هرعدد طبیعی q، صفحهٔ تصویری مرتبهٔ q وجودندارد (مثلاً، برای $q=۶$ و $q=۱۴$)؛ معلوم نشده است که، آیا صفحهٔ تصویری مرتبهٔ ۱۰ وجود دارد یا نه!

مسأله‌هایی برای‌کارمستقل دانش‌آموزان

۲۲.۵. الف) آیا مـی‌توان جدول مربعی ۱۰۰ × ۱۰۰ را طوری با عددها پرکرد که، مجموع‌عددهای‌هرستون، مقداری‌مثبت؛ ومجموع عددهای هرسطر، مقداری منفی باشد؟

ب) آیا می‌توان درخانه‌های جدول ۵ × ۵، ۲۵ عدد را طوری قرار دادکه مجموع چهارعددی که درهرجدول ۲ × ۲ قراردارند، مقداری منفی، ولی مجموع هر۲۵ عدد، مقداری مثبت باشد؟

۲۳.۵. چند نفر، درطـول ۷ ساعت، به‌حلزونی نگاه می‌کنند. هریك ازآن‌ها، درست ۱ ساعت حلزون را زیـرنظرگرفت و اعـلام‌کردکه، دراین ساعت، حلزون درست یك مترخزیده است (اگرچه حرکت حلزون یکنواخت نبوده و توقف‌هایـی هم داشته است). آیا ممکن است، حلزون، در این ۷ ساعت:

الف) بیش از۷ متر؛ ب) بیش از۱۲ متر؛ ج) کمترازه متر؛ د) کمتر از۴ متر، خزیده باشد؟

۲۴.۵. الف) آیا می‌توان عـدد ۱۲۳ را به‌صورت حاصل ضرب چند عدد طبیعی، طوری نوشت که مجموع مجذورهای این عددها، بازهم برابر ۱۲۳ باشد؟

ب) همین پرسش، دربارهٔ عدد ۴۵۶.

۲۵.۵. آیا می‌توان روی یك خط راست

الف) ۶؛ ب) ۷

پاره‌خط راست طوری قرار داد، به‌نحوی که، هرنقطه، به‌بیش از سه پاره‌خط راست متعلق نباشد، و ازهرسه پاره خط راست، دوتا متقاطع باشند؟

۲۶.۵. دراتوبوسی که بلیت فروش ندارد، ۱۵ مسافری که با هم آشنا نیستند، سوارشده‌اند. هرکدام ازآن‌ها، تنها سکه‌هایی به‌ارزش ۱۰، ۱۵ و ۲۰ کوپك دارند. قیمت بلیت ۵ کوپك است:

الف) آیا این مسافران، می‌توانند با ردوبدل کردن سکه‌ها، کرایهٔ خود را به‌طور کامل بپردازند؟

ب) ثابت کنید، اگرمسافران، روی هم کمتراز ۱۹ سکه داشته باشند، نمی‌توانند کرایه‌های خود را، درست وکامل بپردازند.

ج) ثابت کنید، اگرهمهٔ‌مسافران روی هم کمتر از ۲روبل و ۵۰ کوپك داشته باشند، نمی‌توانندکرایهٔ خود را بپردازند (هر روبل برابر ۱۰۰ کوپك است).

۲۷.۵. الف) درمغازه‌ای، لباس‌هایی ازدو رنگ ودومدل مختلف، وجود دارد. ثابت کنید، برای نمایش آن‌هادرویترین، می‌توان دولباس انتخاب کرد که هم ازجهت رنگ وهم ازجهت مدل باهم فرق داشته باشند.

ب) درمغازه‌ای لباس‌هایی باسه رنگ وسه‌مدل متفاوت وجود دارد. آیا می‌توان برای‌ویترین، سه‌لباس طوری انتخاب کرد که معرف هر سه رنگ وهرسه مدل باشند؟

۲۸.۵. مجموع چند عدد برابراست با واحد. آیا ممکن است، مجموع مجذورهای آن‌ها

الف) کمتراز ۰/۰۱؛ ب) بیشتراز ۱۰۰ باشد؟

۲۹.۵. آیا این گزاره‌ها درست‌اند:

الف) اگردر دومثلث ABC و $A_1B_1C_1$ داشته باشیم: $AB=A_1B_1$،

$BC=B_1C_1$ و $\hat{A}=\hat{A}_1$، آن وقت مثلث‌ها باهم برابرند؛

ب) اگرسه‌زاویه ودوضلع ازمثلثی، برابرسه زاویه و دوضلع ازمثلث دیگرباشند، آن وقت این مثلث‌ها برابرند؛

ج) اگر قاعده‌ها و ساق‌های یك ذوزنقه، به‌ترتیب با قاعده‌ها و ساق‌های یك ذوزنقهٔ دیگربرابرباشند، آن وقت این ذوزنقه‌ها با هم برابرند؟

۰۳۰.۵ آیا ممکن است:

الف) طول هریك ازسه‌نیمساز مثلث کمتر از ۱ سانتی‌متر و مساحت آن بیشتراز ۱ سانتی‌مترمربع باشد؛

ب) طول هریك ازسه نیمسازمثلث بیشتراز ۱۰۰ سانتی‌مترو مساحت آن، کمتراز ۱ سانتی‌مترمربع باشد؟

۰۳۱.۵ تعداد ضلع‌های یك چند ضلعی واقع برصفحه، چقدراست، به‌شرطی که

الف) ازاشتراك؛ ب) ازاجتماع

مثلث و چهارضلعی محدب به‌دست‌آمده باشد؟

۰۳۲.۵ آیا می‌توان ازچهار قالب ۱ × ۱، هشت قالب ۲ × ۲ و دوازده قالب ۳ × ۳ وشانزده قالب ۴ × ۴، یك مربع ساخت؟

۰۳۳.۵ الف) آیا می‌توان مثلثی با ضلع‌های نابرابر را، به دومثلث برابرتقسیم کرد؟

ب) آیا می‌توان مربع را به‌چند مثلث با زاویهٔ منفرجه تقسیم‌کرد؟

ج) چگونه می‌توان مثلث با زاویه‌های ۱۵ درجه، ۱۰۵ درجه و ۶۰ درجه را، به‌مثلث‌های متساوی‌الساقین تقسیم کرد؟

د) آیا هرمثلثی را می‌توان به‌مثلث‌های متساوی‌الساقین‌تقسیم کرد؟

۰۳۴.۵ آیا می‌توان مثلث را در داخل دایره‌ای قرارداد که شعاع آن، کمترازشعاع دایرهٔ محیطی مثلث باشد؟

۰۳۵.۵ چهارضلعی با محیط P_1 را، در صفحه در درون چهارضلعی با محیط P_2 قرار داده‌ایم. آیا ممکن است:

الف) $P_1 > P_2$؛ ب) $P_1 > 2P_2$؟

۰.۳۶.۵ آیا می‌توان خط شکسته بسته‌ای را، روی صفحه طوری رسم کرد که، هریك از ضلع‌های خود را

الف) ۳ بار؛ ب) n بار

قطع کند، به‌شرطی که نقطه‌های برخورد ضلع‌های خط شکسته بر رأس‌های آن منطبق نباشند، و ازیك نقطهٔ برخورد، بیش ازدوضلع عبورنکنند؟

۰.۳۷.۵ آیا می‌توان روی صفحه

الف) ۱۲؛ ب) ۱۳

نقطه قرارداد و آن‌ها را با پاره خط‌های راست غیرمتقاطع، طوری به هم وصل کرد که، هرنقطه، به‌پنج نقطهٔ دیگرمربوط باشد؟

۰.۳۸.۵ چهار گروه‌سه‌عددی، ازعددهای درست غیرمنفی، طوری درست کنیدکه بتوان هرعدد درست از ۱ تا ۸۱ را، به‌صورت مجموعی ازچهارعدد، و هرعدد ازیك گروه، نشان داد.

۰.۳۹.۵ آیا می‌توان یك تصاعد هندسی صعودی درست‌کرد که، ۱۰۰ جملهٔ اول‌آن، عددهایی‌درست وبقیهٔ جمله‌های‌آن، همه،عددهایی غیردرست باشند؟

۰.۴۰.۵ آیا عددهای ۷، ۸ و ۹ می‌توانند جمله‌هایی از یك تصاعد هندسی باشند (لزومی ندارد، این عددها، جمله‌های مجاورباشند)؟

۰.۴۱.۵ الف) می‌خواهیم لوستری با هفت لامپ را به جریان برق طوری وصل کنیم‌که بتوان هر تعدادی از لامپ‌ها را (ازیك تا هفت) روشن کرد. آیا تنها با استفاده ازسه‌کلید می‌توان به‌این نتیجه رسید؟

ب) همین پرسش دربارهٔ لوستری با هشت لامپ.

۰.۴۲.۵ معلم ریاضیات ۲۰ مسأله برای حل درخانه، به‌دانش‌آموزان داد. درجلسهٔ بعد معلوم شد، هردانش‌آموز درست دومسأله را حل‌کرده و هرمسأله را درست دو دانش‌آموزحل‌کرده است.

الف) تعداد دانش‌آموزان چقدراست؟

ب) آیا معلم می‌توانـد طوری برنامه‌ریزی کند که، هردانش‌آموز، دربارهٔ یکی ازمسأله‌هایی که خود حل کرده است، صحبت کند؟

ج) ثابت کنید، معلم‌دست کم به‌دوطریق می‌تواند این برنامه را تنظیم کند؛ نمونه‌ای برای حالتی پیدا کنید‌که این روش‌ها، درست برابر۲ باشند.

د)تعداد روش‌های این برنامه‌ریزی، چقدرمی‌تواند باشد؟

۴۳۰۵. بین ۲۵ افسر، بـه تعداد مساوی، افسر پیاده، افسرتوپخانه، افسرتانك، افسر ارتباطات و خلبان و، به‌جز این، به تعداد مساوی ژنرال، سرهنگ، سرگرد، سروان و ستوان وجود دارد؛ درضمن، درهریك ازاین پنج نوع حرفهٔ جنگی، افسرانی ازهرپنج رده هستند. این افسران را، دریك صف ۵ × ۵ طوری قراردهید‌کـه درهرستون و هر ردیف بـه همهٔ درجه‌ها و همهٔ حرفه‌ها برخورد کنیم.

۴۴۰۵. هرمی با قاعدهٔ مثلثی را در هرم دیـگری با قاعدهٔ مثلثی قرار داده‌ایم.

الف) آیا ممکن‌است مجموع یال‌های هرم درونی، ازمجموع‌یال‌های هرم‌بیرونی، بیشتر باشد؟

ب) آیا ممکن است سطح کـل هرم درونی، از سطح کل هرم بیرونی بیشتر باشد؟

۴۵۰۵. آیا می‌توان مکعبی به‌ضلع یك سانتی‌متر را در تکه کاغذ مربع شکلی به‌ضلع ۳ سانتی‌متر پیچید؟

۴۶۰۵. آیا چهاروجهی غیرمنتظمی وجود داردکه پنج زاویهٔ دووجهی آن، برابر α باشد؟ اگرجـواب مثبت است، مقدار زاویـهٔ دو وجهی ششم، چقدراست؟

۴۷۰۵. آیا می‌توان روی سیاره‌ای بـه شکل‌کره و بـه‌قطر واحد، ۸ ایستگاه طوری قراردادکه، اگر جسمی به‌ارتفاع واحد نسبت به‌سطح سیاره واقع باشد، دست‌کم ازدو ایستگاه دیده شود؟

۴۸۰۵. الف) نمونه‌ای از یـك چند وجهی محدب پیدا کنید کـه، همهٔ وجه‌های آن، متوازی‌الاضلاع باشند، ولی‌چندوجهی، متوازی‌السطوح نباشد.

ب) فرض کنید، تعداد جهت‌های مختلف یال‌های این چند وجهی برابر k باشد، دراین صورت، چند وجهی، چند وجه دارد؟

۴۹.۵. الف) چند جمله‌ای $P(x،y)=x+\frac{(x+y+۱)(x+y)}{۲}$، از دو متغیر داده شده است. جدول مقدارهای آن را، به‌ازای x و y درست و غیرمنفی تنظیم می‌کنیم. ثابت کنید، دراین جدول، به‌هرعدد درست غیر منفی، یك بار برخورد می‌کنیم.

ب) دربارهٔ چند جمله‌ای $Q(x،y،z)$ از سه متغیر بیندیشید که، بین مقدارهای آن، به‌ازای x، y و z درست وغیرمنفی، به‌هرعدد درست وغیر منفی، یك باربرخورد کنیم.

۵۰.۵. آیا چندجمله‌ای $P(x،y)$ وجود دارد که، مجموعهٔ مقدارهای آن، مجموعهٔ همهٔ عددهای مثبت باشد؟

۶

دنباله‌ها و تکرارها

۶.۱. الف) رقم صدم بعد از ممیز را در عددنویسی دهدهی $\frac{۱}{۷}$ پیدا کنید.

ب) یك عدد ۶ رقمی پیدا کنید که اگر آن را در عددهای ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ ضرب کنیم، باز هم یك عدد ۶ رقمی به‌دست آید که تنها در ردیف رقم‌ها با عدد اصلی فرق داشته باشد.

۶.۲. دسته‌ای از غازهای سفید روی رشته‌ای از دریاچه‌ها پرواز می‌کنند. به‌هر دریاچه که می‌رسند، نیمی از غازها به‌اضافهٔ نصف یك غاز روی دریاچه می‌نشینند و بقیه به‌پرواز خود ادامه می‌دهند. همهٔ غازها روی هفت دریاچه نشستند. تعداد غازهای این دسته را پیدا کنید.

۶.۳. دنبالهٔ (a_n) به‌این ترتیب تعریف شده است:

$$a_۱ = ۲،\ a_۲ = ۳،\ a_{k+۲} = \frac{a_{k+۱}}{a_k}\ (k = ۱،۲،\ldots)$$

مطلوب است محاسبهٔ $a_{۱۹۸۶}$.

۶.۴۰ درهریك ازدوظرف، A لیتر آب وجود دارد. نصف آب ظرف اول را در ظرف دوم ریخته‌ایم، بعد $\frac{1}{3}$ آب ظرف دوم‌را درظرف اول، سپس $\frac{1}{4}$ آبی راکه درظرف اول است درظرف دوم ریخته‌ایم و غیره. اگراین‌روند جابه‌جایی را ۱۰۰ بارادامه دهیم، درهر ظرف چقدرآب خواهد بود؟

۶.۵۰ دوظرف دراختیار داریم. یك لیترآب دراین ظرف‌ها می‌ریزیم. نصف‌آب ظرف اول را درظرف دوم می‌ریزیم، بعد نصف‌آب موجود درظرف دوم را درظرف اول، سپس نصف آب موجود درظرف اول را در ظرف دوم می‌ریزیم وغیره. ثابت‌کنید، بدون ارتباط با مقدار آبی‌که درابتدا درهرظرف بوده است، بعد از ۱۰۰ جابه‌جایی، با دقت تا یك میلی‌لیتر، مقدار آب موجود در دوظرف، $\frac{2}{3}$لیتر و $\frac{1}{3}$لیتر خواهد بود.

۶.۶۰ جملهٔ اول‌یك‌دنباله، برابراست با 3^{1986}، وازجملهٔ دوم به‌بعد، هرجمله برابراست با مجموع رقم‌های جملهٔ قبل. جملهٔ دهم این دنباله را پیدا کنید.

۶.۷۰ دورمیدانی ۱۲ خانه وجود دارد که نمای بیرونی آن‌ها، به‌رنگ‌های سفید و قرمزاست و درهرکدام از آن‌ها، خانواده‌ای زندگی می‌کند. هریك ازاین۱۲ خانواده، با تعداد فردی از۱۱ خانوادهٔ دیگردوست است. درماه‌ژانویه، یکی ازخانواده‌ها تصمیم گرفت نمای ساختمان خود را به‌رنگی درآوردکه ساختمان‌های بیشترین دوستان او به‌آن رنگ است. در ماه فوریه، خانوادهٔ همسایهٔ او (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت)، همین تصمیم راگرفت. درماه‌مارس، خانوادهٔ سوم (همسایهٔ خانوادهٔ دوم) به‌همین عمل دست زد و غیره. ثابت‌کنید، لحظه‌ای فرا می‌رسدکه، هیچ‌کدام از خانواده‌ها، نیازی به‌تغییر رنگ نمای خانهٔ خود ندارند.

۶.۸۰ فرض می‌کنیم، روی یك صفحهٔ کاغذ شطرنجی نامتناهی، چند خانه (به‌تعداد محدود) «بیمار» باشند. بعد ازهرساعت، به‌طورهم‌زمان، این تغییرها پیش می‌آید: اگرخانه‌ای «بیمار» باشد و دو خانهٔ چپ و پایین او

«سالم» باشند، آن وقت، این خانه هم «سالم» می‌شود؛ ولی اگر خانه‌ای «سالم» باشد و دو خانهٔ چپ و پایین او «بیمار» باشند، آن وقت، این خانه هم «بیمار» می‌شود (بقیهٔ خانه‌ها، در وضع قبلی خود باقی می‌مانند). ثابت کنید، با هرموقعیت اولیهٔ خانه‌های «بیمار»، بعد از گذشت مدتی، همهٔ خانه‌ها «سالم» می‌شوند.

۹.۶. سرجوخه‌ای دربرابرصفی از N سرباز ایستاده است و فرمان می‌دهد: «به‌چپ!». با این فرمان، بعضی ازسربازها به‌چپ، وبقیه، به‌راست برمی‌گردند. بعد از آن، در هرثانیه، هردونفری که رودررو قرار گرفته‌اند، عقب‌گرد می‌کنند. ثابت کنید، بعد از زمانی محدود، حرکت‌متوقف می‌شود. تخمین بزنید، بعد ازچند ثانیه، این وضع پیش می‌آید؟

۱۰.۶. دربرابر کارمندی، روی میز، n جلد ازفرهنگ بریتانیکا، درچند ستون قرار دارد. هر روزکه کارمند به کار می‌پردازد، از هر ستون یك جلد برمی‌دارد و از آن‌ها ستون جدیدی می‌سازد و تعداد جلدهای ستون‌ها را، به‌ترتیب غیرصعودی، در دفترخود ثبت می‌کند. مثلاً، اگردر روز اول، در دفتر (۱، ۱، ۳، ۸) ثبت شود، آن وقت، یادداشت روزبعد (۲، ۴، ۷)، بعد (۱، ۳، ۳، ۶)، (۲، ۲، ۴، ۵) وغیره خواهد بود. بعد از یك ماه، یادداشت دفتراو، چه‌خواهد بود، به‌شرطی‌که تعدادکل n جلد برابر باشد با: الف) ۶؛ ب) ۱۰؟ (تقسیم اولیه به ستون‌ها را، می‌توان دلخواه گرفت.)

۱۱.۶. بین عددهای ده رقمی، چند عدد وجود داردکه طوری با رقم‌های ۲ و ۵ درست شده‌باشندکه، درآن‌ها، دو رقم ۲، مجاورهم نباشند؟

۱۲.۶. بچه‌ها به‌صورت دایره‌ای ایستاده‌اند و می‌خواهند رئیس گروه را انتخاب کنند. برای این‌منظور، به‌این ترتیب عمل می‌کنند: اولی در دایره می‌ماند؛ دومی (با محاسبه درجهت حرکت عقربه‌های ساعت) ازدایره خارج می‌شود؛ سومی درجای خود می‌ماند؛ چهارمی خارج می‌شود و غیره. دایره مرتباً کوچکترمی‌شود تا وقتی‌که تنها یك نفردرآن باقی بماند. چه‌کسی باقی می‌ماند (اگر ازنفراول و درجهت حرکت عقربه‌های ساعت شماره‌گذاری

کنیم، نفرباقی مانده، درابتدای کار، کجا ایستاده است)، به‌شرطی که درآغاز: الف) ۶۴ نفر؛ ب) ۱۹۸۶ نفر باشند؟

۱۳۰۶. دنباله‌ای نامتناهی ازصفرها و واحدها

۰۱۱۰۱۰۰۱۱۰۰۱۰۱۱۰...

بنابرقاعدهٔ زیر درست شده است: دنباله با صفرآغاز وسپس، بی‌نهایت گام برداشته می‌شود. هرگام به‌این ترتیب است که، دربخشی ازدنباله که قبل‌از آن نوشته شده است، همهٔ صفرها را به‌واحد وهمهٔ واحدها را به‌صفرتبدیل می‌کنیم و قطعه دنبالهٔ حاصل را بـه‌دنبال بخش قبلی (درسمت راست آن) می‌نویسیم. الف) درمکان ۱۹۸۶، کـدام رقم نوشته شده است: ۰ یا ۱ ؟ ب) آیا می‌توان این دنباله را، ازجایی به‌بعد، متناوب دانست؟

۱۴۰۶. بعدازپایان یك کلاس ریاضی، این بازی انجام گرفت. ناظری ازسالن، روی دوتکه کاغذ، دوعدد متوالی (هرعدد روی یك کاغذ) نوشت و درسبد انـداخت. اداره‌کنندهٔ بـازی از A و B خواست، هرکدام یکی از کاغذها را بردارند. A و B، عددی را که درکاغذ خودشان نوشته شده بود دیدند، ولی ازعـدد روی کاغذ دیـگری بی‌اطلاع ماندند. بین A و B، این گفت و گو انجام گرفت:

A: من نمی‌دانم چه‌عددی نزد شماست.

B: من نمی‌دانم چه‌عددی نزد شماست.

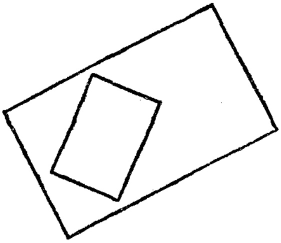
A: من نمی‌دانم چه‌عددی نزد شماست.

B: من نمی‌دانم چه‌عددی نزد شماست.

. . . .

ده‌بار A و ده‌بار B همین جمله راتکرارکردند. تماشاچیان ازتکراراین جمله خسته شده بودند، ولی ناگهان، درباریازدهم، A اعلام کرد: «اکنون، من می‌دانم، چه عددی نـزد شماست». در ایـن جا، اداره‌کننده درگفت و گو دخالت کرد وازتماشاچیان پرسید: چه‌عددهایی ممکن است نزد A و B باشد؟ چه پاسخی باید به‌اداره‌کننده داده شود؟

۱۵۰۶. روی کارت مستطیل شکلی، کارت دیگری با همان‌موقعیت، ولی با مقیاس کوچکترقرار داده‌ایم (شکل ۷۶). ثابت‌کنید، می‌توان با سوزن، دو کارت را با هم، طوری سوراخ‌کرد که، نقطهٔ سوراخ، درهر دو کارت دریك موقعیت باشد.



شکل ۷۶

۱۶۰۶. ثابت کنید، دنبالهٔ

$$\sqrt{۱}, \sqrt{۱+\sqrt{۱}}, \sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱}}}, \ldots$$
$$\ldots, \underbrace{\sqrt{۱+\sqrt{۱+\ldots+\sqrt{۱}}}}_{n \text{ مرتبه}}, \ldots$$

دارای حد است واین حد را پیدا کنید.

۱۷۰۶. دنبالهٔ (a_n)

$$۱, \frac{۲}{۱}, \frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۳}, \frac{۸}{۵}, \ldots$$

به این ترتیب داده شده است: $a_۱=۱$ و $a_{n+۱}=۱+\frac{۱}{a_n}$ (برای هرعدد طبیعی n). عددی پیدا کنید که ازهمهٔ جمله‌های ردیف زوج دنباله ($a_۲$، $a_۴$، $a_۶$،...) کوچکتر و از همهٔ جمله‌های ردیف فرد آن ($a_۱$، $a_۳$، $a_۵$،...) بزرگتر باشد.

۱۸۰۶. این دستگاه معادله‌ها را حل‌کنید:

$$\begin{cases} ۲y=۴-x^۲ \\ ۲x=۴-y^۲ \end{cases}$$

بحث و بررسی مسأله‌ها

مسألهٔ ۱۰۶. الف) پاسخ: ۸.

اگر ۱ را بر ۷ تقسیم کنیم، می‌بینیم که، در خارج قسمت، دنباله‌ای متناوب از رقم‌های ۱، ۴، ۲، ۸، ۵، ۷ به‌دست می‌آید (دورهٔ تناوب، عبارت است از (۱۴۲۸۵۷)). چون $۱۰۰ = ۶ \times ۱۶ + ۴$، بنابراین، رقم صدم بعد ازممیز، همان چهارمین رقم دورهٔ تناوب، یعنی ۸، قراردارد.

∇ برای هر دو عدد طبیعی p و q، کسر $\frac{p}{q}$، یا به‌صورت کسر دهدهی متناهی درمی‌آید و یا به‌صورت کسردهدهی نامتناهی و متناوب. در واقع، ضمن تقسیم برعدد طبیعی q، در باقی مانده، عددی طبیعی وکوچکتر از q به دست می‌آید. بنابراین، ضمن تقسیم، درمرحله‌ای که از q گام تجاوز نمی‌کند، یا باقی مانده برابرصفرمی‌شود و به‌کسردهدهی متناهی می‌رسیم، و یا به‌یکی ازباقی مانده‌هایی می‌رسیم که قبلاً با آن برخورد داشته‌ایم که، در نتیجه، رقم‌های خارج قسمت، به‌صورت تناوبی، تکرار می‌شوند. دراین استدلال، ازاصل دیریکله استفاده می‌شود، که دربارهٔ آن، در بحث مسألهٔ ۹.۲ صحبت کرده‌ایم.

ب) پاسخ: ۱۴۲۸۵۷.

در واقع، ازضرب این عدد در ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، به‌ترتیب، عددهای ۲۸۵۷۱۴، ۴۲۸۵۷۱، ۵۷۱۴۲۸، ۷۱۴۲۸۵ و ۸۵۷۱۴۲ به‌دست می‌آید.

∇ عددی که درپاسخ ب) آورده‌ایم، همان دورهٔ تناوبی است که در تقسیم عدد ۱ بر ۷، درعدد نویسی دهدهی، به‌دست می‌آید. پنج عددی که نوشته‌ایم، به‌نوبهٔخود، عبارتنداز دوره‌های تناوب کسرهای دهدهی عددهای $\frac{۲}{۷}$، $\frac{۳}{۷}$، $\frac{۴}{۷}$، $\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۶}{۷}$.

مسألهٔ ۲۰۶. پاسخ: ۱۲۷ غاز.

فرض می‌کنیم، یک غاز خاکستری، همیشه همراه با غازهای سفید در

پروازباشد. وقتی که m غازسفید از روی دریاچه‌ای عبور کنند (همراه با غاز خاکستری)، آن وقت، بنابر فرض مسأله، به‌تعداد $\frac{m}{۲}+\frac{۱}{۲}$، یعنی $\frac{m+۱}{۲}$ غاز روی دریاچه می‌نشینند واین، درست برابر نصف همهٔ غازهاست. به‌این ترتیب، بعد ازپرواز از روی هردریاچه، تعداد غازها، درست نصف‌می‌شود وبعد ازآن‌که از روی هفت دریاچه عبور کنند، به‌اندازهٔ $۲^۷$، یعنی ۱۲۸ بارکم‌می‌شوند وتنهاغازخاکستری به‌پروازخود ادامه می‌دهد. یعنی روی‌هم ۱۲۸ غاز بوده‌است که، ازبین‌آن‌ها، ۱۲۷ تا سفیدند.

∇ غازخاکستری، به‌طورتصادفی، وارد درحل مسأله نشده است. تعداد غازهای سفید را x_k و تعداد دریاچه‌های جلوآن‌ها را k می گیریم. دراین صورت، شرط مسأله را می‌توان این‌طورنوشت:

$$x_k-x_{k-۱}=\frac{x_k}{۲}+\frac{۱}{۲}$$

ازاین جا، برای دنبالهٔ (x_k)، به‌این رابطهٔ برگشتی می‌رسیم:

$$x_k=۲x_{k-۱}+۱ \qquad (*)$$

با اضافه‌کردن غاز خاکستری، در واقع، متغیر x_n را با متغیر $y_n=x_n+۱$ عوض کرده‌ایم و دنبالهٔ جدید (y_n) را به‌دست‌آورده‌ایم. اگردررابطهٔ برگشتی $(*)$، قراردهیم: $x_k=y_k-۱$ و $x_{k-۱}=y_{k-۱}-۱$، آن وقت، به رابطه‌ای برای دنبالهٔ (y_n) می‌رسیم که ساده‌تراست: $y_k=۲y_{k-۱}$. (y_k)، یك تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲می‌شود و، بنابراین، جملهٔ‌عمومی‌آن‌به‌صورت $y_n=۲^n y_۰$ درمی‌آید. اگربه‌دنبالهٔ (x_n) برگردیم، دستوری برای جملهٔ عمومی‌آن پیدا می‌شود: $x_n=۲^n-۱$.

اکنون، حالت کلی‌تری از دنبالهٔ (x_n) را در نظرمی گیریم و برای‌آن فرض می کنیم:

$$x_k=qx_{k-۱}+d \qquad (**)$$

اگر $q=1$، آن وقت (x_n) یك تصاعد حسابی است و جملهٔ عمومی آن، با دستور $x_n=x_0+d(n-1)$ بیان می‌شود.

اگر $q\neq 1$ و $d=0$، آن وقت (x_n) یك تصاعد هندسی است و، برای جملهٔ عمومی‌آن، داریم: $x_n=q^n\cdot x_0$.

اگر $q\neq 1$ و $d\neq 0$، آن وقت z را طوری پیدا می‌کنیم که دنبالهٔ $y_n=x_n+z$ یك تصاعد هندسی باشد. اگر در رابطهٔ (**) قراردهیم:

$$x_k=y_k-z \text{ و } x_{k-1}=y_{k-1}-z$$

به‌دست می‌آید:

$$y_k=qy_{k-1}+z(1-q)+d$$

اگر z را طوری انتخاب کنیم که داشته باشیم: $z(1-q)+d=0$، آن‌وقت $y_k=qy_{k-1}$ و ازآن جا $y_n=q^n y_0$؛ و دستوری برای جملهٔ عمومی پیدا می‌شود:

$$x_n=q^n(x_0+z)-z$$

که درآن $z=\frac{d}{q-1}$. در مسالهٔ ما، $q=2$، $x_0=0$، $d=1$ و $z=1$ (یك غازخاکستری).

مسألهٔ ۳.۶. پاسخ: $a_{1986}=\frac{2}{3}$.

نخستین جمله‌های این دنباله را می‌نویسیم:

$$2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2, 3, \ldots$$

a_7 و a_8، همان عددهای a_1 و a_2 هستند، بنابراین، دنبالهٔ ما متناوب است و ۶ جملهٔ‌اول، پشت‌سرهم تکرارمی‌شوند. چون ۱۹۸۶ بر ۶ بخش‌پذیر است، بنابراین

$$a_{۱۹۸۶}=a_{۶}=\frac{۲}{۳}$$

▽ درمسألهٔ ۲.۶، جمله‌های $a_۱$ و $a_۲$ را، هر عدد غیرصفری انتخاب کنیم، به‌دنباله‌ای متناوب بـا دورهٔ تناوب ۶ می‌رسیم، یعنی $a_{n+۶}=a_n$. برای روشن شدن موضوع، کافی است هشت جملهٔ اول دنباله را بنویسیم:

$$a_۱, a_۲, \frac{a_۲}{a_۱}, \frac{۱}{a_۱}, \frac{۱}{a_۲}, \frac{a_۱}{a_۲}, a_۱, a_۲, \ldots$$

اگر $\ln|a_n|$ را با x_n نشان دهیم، آن وقت، دنبالهٔ (x_n) ازشرط

$$x_{n+۲}=x_{n+۱}-x_n, \ (n>۱)$$

تبعیت می‌کندکه، باز هم، دنباله‌ای متناوب با دورهٔ تناوب ۶ است. گزارهٔ کلی‌تر زیرهم درست است: اگر $d=۲\cos\frac{k\pi}{m}$ که، درآن k وm $(k<m)$، عددهایی طبیعی و نسبت به‌هم اول‌اند، آن وقت، دنبالهٔ با شرط

$$x_{n+۲}=dx_{n+۱}-x_n$$

دنباله‌ای متناوب، بـا دورهٔ تناوبی بـرابـر $۲m$ است. بـه‌ازای $k=۱$ و $m=۳$، به‌دست می‌آید: $d=۲\cos\frac{\pi}{۳}=۱$، و دورهٔ تناوب دنباله برابر $۲m=۶$ می‌شود.

مسألهٔ ۴.۶. پاسخ: همان مقدارنخستین، یعنی درهرظرف A لیتر.

برای این‌که دراین مورد قانع شویم، ثابت می‌کنیم‌که، بعد ازهردو جابه‌جـایی، مقدار آب داخـل هرظرف، همان مقدارنخستین خـواهد بود. وقتی‌که به‌یکی از ظرف‌ها، به‌اندازهٔ $\frac{۱}{k}$ آب ظرف دیگر اضافه کنیم، مقدار آب آن چنین می‌شود:

$$A\left(1+\frac{1}{k}\right)=A\frac{k+1}{k} \text{ (لیتر)}$$

اکنون $\frac{1}{k+1}$ام آب این ظرف را به‌ظرف اول برمی‌گردانیم، مقدار آبی که درآن باقی می‌ماند، چنین است:

$$A\frac{k+1}{k}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=A\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k}{k+1}=A \text{ (لیتر)}$$

مسألهٔ ۵۰۶. یادآوری می‌کنیم کـه اگر در ظرف اول $\frac{2}{3}$ لیتر، و در ظرف دوم $\frac{1}{3}$ لیتر آب ریخته باشیم، بعد از نخستین جابه‌جایی، حجم آب‌ها، جای خود را عوض مـی‌کنند و، بعد ازجابه‌جایی دوم، مقدارآب هرظرف، همان مقدارنخستین خود خواهد بود.

اکنون، به‌حـالت‌کلی می‌پردازیم. فـرض کنید، بعد از تعداد زوجـی جابه‌جایی، درظرف‌اول $\left(\frac{2}{3}+p\right)$ لیتر $\left(-\frac{2}{3}\leqslant p\leqslant\frac{1}{3}\right)$ آب وجود داشته باشد. دراین صورت، مقدارآب ظـرف دوم، برابر $\left(\frac{1}{3}-p\right)$ لیتر خـواهد بود. بعد از جابه‌جایی بعدی، مقدار آب، دراین دوظرف، به ترتیب چنین است:

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{p}{2}\right) \text{ لیتر و } \left(\frac{1}{3}+\frac{p}{2}\right) \text{ لیتر}$$

و بعد ازجابه‌جایی بعد ازآن

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{p}{4}\right) \text{ لیتر و } \left(\frac{2}{3}+\frac{p}{4}\right) \text{ لیتر}$$

به‌این‌ترتیب، بعدازهردوجابه‌جایی، مقداراضافی p، به $\frac{1}{4}$ خود تقلیل

پیدا می‌کند. بنابراین، بعد از ۱۰۰ جابه‌جایی (یعنی ۵۰ بار جابه‌جایی متقابل)، مقدار اضافی p، به اندازهٔ $\frac{۱}{۴^{۵۰}}$ خود می‌شود و مقدار آب ظرف‌ها، به‌ترتیب، برابر این عددها خواهد بود:

$$\frac{۲}{۳}+\frac{p}{۴^{۵۰}} \quad و \quad \frac{۱}{۳}-\frac{p}{۴^{۵۰}}$$

چون p باید در شرط $-\frac{۲}{۳}\leqslant p\leqslant\frac{۱}{۳}$ صدق کند، مقدار اضافی $\frac{p}{۴^{۵۰}}$، از $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ کمتر می‌شود، یعنی مقدار آب ظرف‌ها، با دقت زیادی، برابر $\frac{۲}{۳}$ لیتر و $\frac{۱}{۳}$ لیتر خواهد بود.

∇ اگر به‌جای نصف آب هر ظرف، هر بار $\frac{۱}{n}$ آب موجود در ظرف را، در ظرف دیگر بریزیم، بعد از ۱۰۰ جابه‌جایی، مقدار آب ظرف‌ها، با دقت زیادی، برابر با $\frac{n}{۲n-۱}$ لیتر و $\frac{n-۱}{۲n-۱}$ لیتر خواهد بود.

ببینیم این جواب را چگونه به دست می‌آورند. اگر در ظرف اول x لیتر و در ظرف دوم y لیتر آب باشد، بعد از نخستین جابه‌جایی، در ظرف اول به اندازهٔ $\left(\frac{n-۱}{n}\right)x$ لیتر باقی می‌ماند. برای این‌که، بعد از جابه‌جایی دوم، در ظرف اول دوباره همان x لیتر آب وجود داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$y=\left(\frac{n-۱}{n}\right)x$$

و چون $x+y=۱$، پس $x=\frac{n}{۲n-۱}$ لیتر و $y=\frac{n-۱}{۲n-۱}$ لیتر.

مسألهٔ ۶۰۶. پاسخ: ۹.

اگر عددی بر ۹ بخش‌پذیر باشد، مجموع رقم‌های آن، بر ۹ بخش‌پذیر خواهد بود. عدد $۳^{۱۹۸۶} = ۹ \times ۳^{۱۹۸۴}$ بر ۹ بخش‌پذیر است، بنابراین همهٔ جمله‌های دنبالهٔ مفروض، عددهایی بخش‌پذیر بر ۹ هستند.

مقدارهای این جمله‌ها را تخمین می‌زنیم. از نابرابری $۳^{۲} < ۱۰$ نتیجه می‌شود:

$$۳^{۱۹۸۶} < ۱۰^{۹۹۳}$$

بنابراین، در عدد $۳^{۱۹۸۶}$، بیش از ۹۹۳ رقم وجود ندارد و جملهٔ دوم دنباله، نمی‌تواند از عدد $۹ \times ۹۹۳ < ۱۰^{۴}$ بزرگ‌تر باشد. یعنی درجملهٔ دوم، بیش ازچهار رقم وجود ندارد. دراین صورت، جملهٔ سوم‌دنباله، از $۳۶ = ۴ \times ۹$ بزرگ‌ترنیست. به‌این ترتیب، جملهٔ چهارم دنباله از ۱۸ کوچکتراست. چون، جملهٔ چهارم هم، مثل جمله‌های قبل بر ۹ بخش‌پذیراست، باید برابر ۹ باشد. و این، به‌معنای آن است که از جملهٔ چهارم به بعد، همهٔ جمله‌ها، برابر ۹ هستند.

∇ به‌طور کلی، درهر دنبالهٔ عددهای طبیعی که، در آن، جملهٔ nام برابر است با مجموع رقم‌های جملهٔ $(n-۱)$ام، همهٔ جمله‌ها، از جایی به‌بعد، با هم برابرمی‌شوند. اگرباقی ماندهٔ تقسیم جملهٔ اول بر ۹ برابر r باشد، درحالت $r \neq ۰$، این جمله‌های برابر، مساوی ۹ و در حالت $r = ۰$، مساوی ۹ می‌شوند.

مسألهٔ ۷۰۶. زوج خانواده‌های دوستی را درنظرمی گیریم که، رنگ نمای خانهٔ آن‌ها، مختلف باشد. درهرماه، تعداد این زوج‌ها، افزایش پیدا نمی‌کند. در واقع، اگرخانواده‌ای که نوبت‌اورسیده است، رنگ خانهٔ خود را تغییرندهد، تعداد این‌زوج‌ها تغییرنمی کند و اگررنگ‌خانهٔ‌خودرا عوض کند، تعداد این زوج‌ها، کم می‌شود. چون تعداد این زوج‌ها، عدد غیرمنفی‌است، نمی‌تواند تا بی‌نهایت، کوچك شود؛ یعنی زمانی فرامی‌رسدکه دیگر بی‌تغییر می‌ماند. ازاین زمان به‌بعد، دیگر رنگ هیچ خانه‌ای عوض نمی‌شود.

▽ این شرط برای مسأله لازم است که تعداد خانواده‌های دوست، برای هرخانه، عددی فردباشد، زیرا در غیراین صورت، ممکن است نتوان اکثریت‌دوستان را پیداکرد (موقعی‌که نیمی ازخانه‌های دوست به‌رنگ سفید و نیمی دیگربه‌رنگ‌قرمزباشند). درحل مسأله، ازاین‌روش استفاده‌کرده‌ایم: مطلوب است مقداری که (در این جا، تعداد زوج خانواده‌های دوستی‌که خانه‌هایشان رنگ‌های متفاوت دارند)، طبق عملی‌که شرط شده است، تغییر نکند و یا کاهش یابد. ازاین روش، اغلب می‌توان درمورد مجموعه‌هایی‌که، درموردآن‌ها، عملی را تکرارمی‌کنیم، استفاده‌کرد.

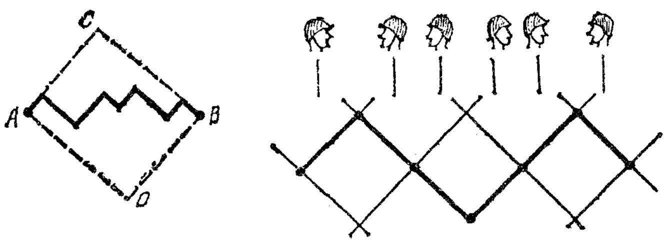
مسألهٔ ۸.۶. درامتداد ضلع بالای بالاترین خانهٔ «بیمار» خط راستی رسم می‌کنیم. روشن است، هیچ خانه‌ای دربالای این خط راست، خانهٔ «بیمار» نیست. به‌همین ترتیب، همهٔ خانه‌هایی‌که درسمت راست خانهٔ «بیمار» سمت راست‌ترین نقطهٔ جدول قراردارند، «بیمار» نیستند. به‌این ترتیب، همهٔ خانه‌های احتمالی «بیمار» دردرون‌یك زاویهٔ قائمه قراردارند. دورترین قطری نسبت به‌رأس این زاویه را درنظرمی‌گیریم‌که برنیمساز آن عمود باشد و، روی‌آن، خانه‌های «بیمار» پیدا شود. روشن است، همهٔ خانه‌های «بیمار» واقع براین قطر، بعد ازساعتی «سالم» می‌شوند. بنابراین، بعد ازهرساعت، این دورترین قطر (که شامل خانه‌های «بیمار» است)، گامی به‌سمت رأس برمی‌دارد. دراین صورت، زمانی فرا می‌رسد که، این قطر، به رأس می‌رسد و این، همان زمانی است‌که همهٔ خانه‌ها «سالم» شده‌اند.

برای علاقه‌مندان. فرض کنید، درصفحهٔ شطرنجی، هر خانه بتواند در یکی‌ازدوحالت ۰ یا ۱ (ویایکی از N حالت؛ N عددی‌متناهی‌است) قرارگیرد؛ و درهرلحظهٔ زمانی t ($t = ۱، ۲، ۳، ...$)، یکی ازاین حالت‌ها را، درارتباط با وضع چند خانهٔ مجاورخود، طبق قانون معینی مثل قانون F (که برای همهٔ خانه‌های مجاور، یکسان عمل می‌کند)، اختیارکند. بررسی ومطالعهٔ این‌گونه دستگاه‌ها، که به آن‌ها، سلول‌های خودکار می‌گویند، در دهه‌های اخیر، مورد علاقهٔ فیزیك‌دانان، سازندگان کامپیوترها و ریاضی‌دانان قرار گرفته‌اند. برای‌برخی قانون‌های نسبتاً ساده، سلول خودکار، رفتاری بغرنج

وعجیب دارد. این رفتار پیچیده، نه‌تنها درسلول خودکار دوبعدی، بلکه در سلول خودکاریك بعدی(که روی یك خط‌راست قراردارد) نیزدیده می‌شود. بسیاری از این رفتارها را، با برنامه‌ریزی کامپیوتری، مورد مطالعه قرار داده‌اند.

نتیجه‌گیری‌های ریاضی، که تاکنون ازسلول‌های خودکاربه‌دست‌آمده است، چندان زیاد نیست. برای بعضی از مسأله‌های مربوط به‌آن‌ها، غیر-قابل حل بودن آن‌ها ثابت شده است، ولی درمورد بیشترآن‌ها، نه‌قاعده‌ای کلی برای‌حل وجود دارد ونه غیرقابل حل بودن آن‌ها ثابت شده است.

مسأله ۹.۰۶. صف سربازها را درتناظر با خط شکسته‌ای روی صفحهٔ کاغذ شطرنجی قرارمی‌دهیم، به‌نحوی که ضلع‌های این خط شکسته، با خط افقی، زاویهٔ ۴۵ درجه بسازند (شکل ۷۷ ـ الف). هرسرباز متناظراست با پاره خط راستی‌ازخط شکسته؛ درضمن، اگرسربازبه‌طرف راست نگاه‌می‌کند،



الف)　　　　ب)

شکل ۷۷

پاره خط راست متناظرآن درخط شکسته، به‌سمت بالا، و اگرسربازبه‌طرف چپ نگاه می‌کند، پاره خط متناظربه‌سمت پایین می‌رود. تغییرهایی را که بعد ازهرثانیه، درصف پدید می‌آید، می‌توان به‌این ترتیب شرح داد: دو انتهای A و B از خط شکسته، تغییرجا نمی‌دهند، ولی هرگوشه‌ای‌که ازدو پاره‌خط راست مجاورتشکیل شده و«تپه‌ای»را درست‌کرده است، به‌گوشه‌ای به‌طرف پایین تبدیل می‌شود و «چاله‌ای» را درست می‌کند. به این ترتیب،

ارتفاع بلندترین «تپه»، درهر ثـانیه، کمترمی‌شود و زمانی فرا می‌رسد که، خط شکسته، حتی یك «تپه» هم ندارد، یعنی بـه‌صورت خط شکستهٔ AOB، دو ضلع مجاور از مستطیل $AOBC$، درمی‌آید (شکل ۷۷ـ ب).

بیشترین زمانی‌که برای حرکت‌های عقب گرد N سربازلازم است، از N ــ ۱ ثانیه تجاوزنمی‌کند. این حـداکثر زمـان، وقتی به‌دست مـی‌آیدکه وضع نخستین سربازها، متناظربـا خط شکستهٔ ACB باشد؛ در مورد هرخط شکستهٔ دیگری‌کـه همین دوانتها را داشته باشد، برای توقف عقب گردها، زمان‌کمتری لازم است.

∇ اگردریك صف نـامتناهی، تقریباً همهٔ سربـازها روبه چپ و تعداد محدودی ازآن‌ها، روبه‌راست داشته باشند، حرکتی‌که درمسأله به‌آن اشاره شده است، بـرای همیشه ادامه خواهد داشت و، این حرکت، درطول صف، همچون موج ظاهرمی‌شود.

مسألهٔ ۱۰۵.۶ الف) پاسخ: (۱، ۲، ۳).

(۲, ۲, ۱, ۱)
↓
(۴, ۱, ۱)
↓
(۳, ۳)

(۲, ۱, ۱, ۱, ۱)　　(۲, ۲, ۲)
↓　　↓
　　(۳, ۱, ۱, ۱)
(۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱) → (۶) → (۵, ۱) → (۴, ۲)
↓
(۳, ۲, ۱)

شکل ۷۸

طرحی‌که درشکل ۷۸ داده شده است، همه چیز را روشن می‌کند. در آن‌جا همهٔ حـالت‌های ممکن، بـرای $n=۶$ نشان داده شده است. علامت پیکان نشان می‌دهدکه، بعد ازیادداشت، چـه یادداشتی باید در روز بعد در دفترکارمندثبت‌شود. می‌بینیم، حداکثربعدازv روز، بایدیادداشت (۱، ۲، ۳)

در دفتر تکرار شود.

ب) پاسخ: (۱، ۲، ۳، ۴).

برای به‌دست‌آوردن این جواب هم، می‌توان شبیه شکل ۷۸، طرحی رسم کرد. چنین طرحی نشان می‌دهد که، ستون‌های اولیهٔ فرهنگ به هر گونه‌ای باشند، حداکثربعد از ۱۳ روز، به‌یادداشت (۱، ۲، ۳، ۴) می‌رسد که ازآن به بعد، همین عددها تکرارمی‌شوند.

▽ در واقع، برای هر عدد n، می‌توان با چنین طرحی به‌نتیجه رسید، ولی‌روشن‌است که، برای عددهای بزرگ n، به‌وقت زیادی نیاز دارد. ولی، بدون انجام تمامی‌آزمایش، می‌توان روشن‌کرد که، کدام یادداشت‌ها، بعد از زمانی‌طولانی، تکرارمی‌شوند. نتیجهٔ کلی‌را، می‌توان این‌طور تنظیم‌کرد. اگر n (تعداد جلدها) را بتوان به‌صورت مجموعی ازعددهای طبیعی متوالی با آغاز از واحد نوشت، یعنی

$$n=۱+۲+\dots+k=\frac{۱}{۲}k(k+۱)،\ (k\in\mathbf{Z}^+)$$

آن وقت، روزی فرا می‌رسدکه، ازآن به‌بعد، عددهای

$$k، k-۱، k-۲، \dots، ۳، ۲، ۱$$

مرتباً در دفتر یادداشت‌تکرارمی‌شوند. (درمسألهٔ ۱۰.۶، در هر دو حالت «الف» و «ب» با همین وضع روبه‌روبودیم: $\frac{۳\times۴}{۲}=۶$ و $\frac{۴\times۵}{۲}=۱۰$).

ولی‌اگرعدد n رانتوان به‌صورت $\frac{۱}{۲}k(k+۱)$ نوشت، آن‌وقت، یادداشت‌های دفتر، حالت دوری به‌خود می‌گیرند: ازجایی به‌بعد، یادداشت‌ها تکرارخود را بک دورهٔ تناوبی برابر k آغازمی‌کنند که، درآن

$$\frac{۱}{۲}k(k-۱)<n<\frac{۱}{۲}k(k+۱)$$

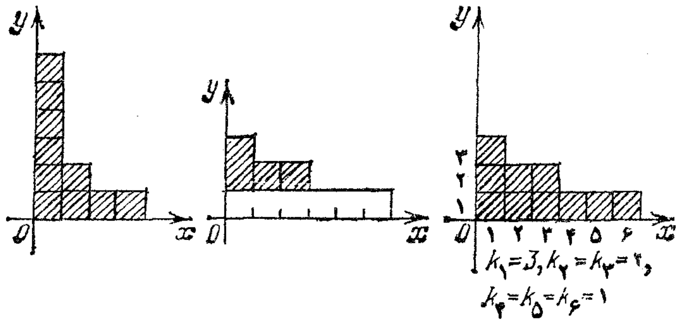
این حکم را ثابت می‌کنیم و، به‌جزآن، روشن می‌کنیم که، درحالت

($n \neq \frac{1}{2} k(k+1)$، دورهٔ تناوب تکرار چیست!

ربع اول دستگاه مختصات قائم را درنظرمی‌گیریم و شبکهٔ مختصاتی را روی‌آن رسم می‌کنیم. یادداشت در دفتر را به‌صورت

$$(k_1, k_2, \dots, k_l) ; (k_1 \geqslant k_2 \geqslant \dots \geqslant k_l)$$

به‌این شکل، نشان می‌دهیم: روی شکل، ابتدا ستون به‌ارتفاع k_1، سپس در کنارآن، ستون به ارتفاع k_2، بعد ستون به ارتفاع k_3 و غیره را رسم می‌کنیم تا به‌ستون با ارتفاع k_l برسیم (شکل ۷۹).



الف)　　ب)　　ج)

شکل ۷۹

روند عمل کارمند را، می‌توان روی این شکل، به این ترتیب نشان داد.

مرحلهٔ اول. سطر پایینی شکل را ازآن جدا می‌کنیم، آن چه را که باقی می‌ماند، یك خانه به‌سمت راست و یك خانه به‌طرف پایین می‌بریم؛ سپس بخش جدا شده‌را، به‌اندازهٔ ۹۰درجه (درجهت عکس‌حرکت عقربه‌های ساعت) دوران می‌دهیم (یعنی، سطر جدا شده را به جای ستون اول می‌گذاریم).

مرحلهٔ دوم. اگرستون‌جدید اول، بلندترین ستون نباشد (ازستون دوم،

کوتاه‌ترباشد)، آن خانه‌هایی را که درسمت چپ خود، جای آزاد دارند می‌بریم واز راست به‌چپ، به‌خانهٔآزاد، منتقل می‌کنیم. بعد ازمرحلهٔ دوم، ستون‌ها، به‌ترتیب ارتفاع خود (به‌طورنزولی) قرارخواهند داشت.

برای‌هرخانه، دوعدد درست درنظر می‌گیریم که مختصات آن‌خانه را مشخص می‌کنند: شمارهٔ ستون وشمارهٔ سطری که درآن واقع‌اند.

وقتی که مرحلهٔ اول به‌پایان برسد، مجموع دو مختص هرخانه، تغییر نمی‌کند؛ ولی بعد از مرحلهٔ دوم، برای خانه‌هایی که تغییرجا داده‌اند، این مجموع کوچکترمی‌شود.

اکنون، مجموع دومختص همهٔ خانه خانه‌ها را درنظرمی‌گیریم. این مجموع، درمرحلهٔ اول بی‌تغییرمی‌ماند و درمرحلهٔ دوم، کاهش پیدا می‌کند. ازاین‌جا، به‌این نتیجه می‌رسیم که، با مرحلهٔ دوم، به‌تعداد محدودی مواجه می‌شویم (مجموع مختصات خانه‌ها، عددی‌درست ومثبت است ونمی‌تواند، به‌طورنامتناهی، کوچك شود). به این ترتیب، با آغاز ازلحظه‌ای، تنها با مرحلهٔ اول سروکارخواهیم داشت؛ یعنی، مجموع دو مختص هرخانه، ثابت می‌ماند. ازاین‌لحظه به‌بعد، هرخانهٔ (x, y)، در دوربستهٔ زیرحرکت می‌کند:

$$(1, q-1) \to (2, q-2) \to \dots \to (q-1, 1) \to (1, q-1)$$

که ما آن را، q قطری می‌نامیم.

درضمن، تنها طولانی‌ترین قطرآخرمی‌تواندکامل نباشد. در واقع، ون دیگرمرحلهٔ دوم پیش نمی‌آید، خانه‌های جدول، درقطرqام، دوری با د ۀ تناوب q دارند. دورهٔ تناوب قطر qام وقطر $(q-1)$ام، یك واحد باه اختلاف‌دارند. بنابراین، این‌وضع نمی‌تواند پیش‌آیدکه، در$(q-1)$امین قطر، خانه‌های‌آزاد وجود داشته باشد و درقطر qام دست‌کم یك خانهٔ سیاه پیدا شد، زیرا دراین صورت، خانهٔ سیاه قطرqام، دیریا زود درسمت‌راست خانهٔآزا قرارمی‌گیرد و انجام مرحلهٔ دوم لازم می‌شود.

به‌ا ن ترتیب، خانه‌های‌آزاد، تنها درآخرین قطرممکن است وجود داشته باشند درحالت $n=\frac{1}{2}k(k+1)$، هر k قطرکامل‌اند؛ و روشن‌است

که درحالت $n\neq\frac{۱}{۲}k(k+۱)$، یك دوربه‌وجود می‌آید.

شکل‌های پله‌ای که شامل خانه‌های‌مربعی‌هستند و، همچنین، جدول‌های عددی این گونه شکل‌ها کــه شامل عددهای طبیعی از ۱ تا n باشند، به حل بسیاری ازمسأله‌های‌آنالیز ترکیبی و جبر، کــه به‌تقسیم عددهای طبیعی به جمله‌های طبیعی و بــه‌محاسبهٔ گــروه‌های تبدیــل و غیره مربوطاند، کمك می‌کنند. این شکل‌ها، نام خاصی دارند و به‌آن‌ها دیاگرام یونگ می‌گویند.

مسألهٔ ۱۱۰۶۰. پاسخ: ۱۴۴ عدد.

همهٔ عددهای ده رقمی را که بــا شرط مسألــه سازگارند، به‌دو گروه تقسیم می‌کنیم: گــروه اول، عددهایی‌که به ۵ ختم مــی‌شوند و گروه دوم، عددهایی‌که رقم‌آخرآن‌ها برابر ۲ است.

درهمهٔ عددهای گروه اول، رقم‌آخر ۵ را حذف می‌کنیم، همهٔ عددهای نه‌رقمی به‌دست می‌آید که، درآن‌ها، دو رقم برابر۲، مجاورهم نیستند.

درهمهٔ عددهای گروه دوم، دو رقم۵۲ را حذف می‌کنیم، همهٔ عددهای هشت رقمی به‌دست می‌آید که، در آن‌ها، دو رقم برابر ۲، مجاور هم قرار نگرفته‌اند.

اگرتعداد عددهای n رقمی را که از ۲ و ۵ تشکیل‌شده‌اند و دو رقم برابر ۲، در مجاورت هم قرار نگرفته‌اند، a_n بگیریم، استدلال فوق روشن می‌کند که

$$a_{۱۰}=a_{۹}+a_{۸}$$

یادآوری می‌کنیم که، به‌طورکلی، برای $n\geqslant ۳$ داریم:

$$a_n=a_{n-۱}+a_{n-۲}$$

چون $a_۱=۲$ و $a_۲=۳$، پس طبق این دستوربه‌دست می‌آید:

$$a_۳=۵,\ a_۴=۸,\ a_۵=۱۳,\dots,a_{۱۰}=۱۴۴$$

∇ دنبالهٔ a_n، در واقع، همان دنبالهٔ فیبوناچی (F_n) است‌که ازجملهٔ

سوم آن آغازشده است. دنبالهٔ فیبوناچی چنین است:

$$۱،۱،۲،۳،۵،۸،...$$

یعنی $a_n = F_{n+۲}$ (بحث مسألهٔ ۴.۲،(ب) را ببینید).

برای دنباله‌های صعودی که، درآن‌ها، جملهٔ عمومی، به‌صورت تابعی خطی ازچند جملهٔ قبلی داده شده باشد، می‌توان دستوری پیداکرد که جملهٔ عمومی رابرحسب شمارهٔآن‌بیان‌کند. این‌مطلب را، روی دنبالهٔ فیبوناچی، روشن می‌کنیم.

تصاعد هندسی $u_k = a\lambda^k$ را طوری پیدا می‌کنیم‌که، برای‌آن، داشته باشیم: $u_{n+۱} = u_n + u_{n-۱}$. به‌این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$\lambda^۲ = \lambda + ۱ \Rightarrow \lambda_{۱,۲} = \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

بنابراین، دو تصاعد هندسی، به‌صورت

$$b\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n, \quad c\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n$$

به‌دست می‌آید. برای دنباله‌ای هم‌که ازمجموع جمله‌به‌جملهٔ این دو دنباله به‌دست می‌آید، رابطهٔ $u_{n+۱} = u_n + u_{n-۱}$ برقرار است. b و c را طوری پیدا می‌کنیم‌که، دستور

$$u_n = b\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n + c\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n$$

برای دوجملهٔ اول $u_۱$ و $u_۲$ مناسب باشد.

برای دنبالهٔ فیبوناچی $u_۱ = ۱$ و $u_۲ = ۱$؛ ازآن جا $b = -c = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$.

برای دنبالهٔ (a_n) ازمسألهٔ ۱۱.۶، به‌این دستورمی‌رسیم:

$$a_n = F_{n+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}$$

مسألهٔ ۱۲۰۶. الف) پاسخ: وقتی‌که ۳۲ نفر از دایره خارج شوند، ۳۲ نفر در دایره باقی‌می‌مانند و شمارش دوباره، ازنفراول آغاز می‌شود.

همین وضع تکرارمی‌شود: ۱۶ نفرخارج می‌شوند و، برای ۱۶ نفر باقی مانده، شمارش ازنفراول آغازمی‌شود. اگرچند باراین دور را ادامه دهیم، تنها نفراول باقی می‌ماند.

ب) پاسخ: نفر ردیف ۱۹۲۵.

ازحل بخش «الف» معلوم‌شدکه، اگرتعدادکسانی‌که‌روی محیط دایره ایستاده‌اند، 2^n باشد، درانتهای‌کار، نفراول (کسی‌که شمارش را ازاوآغاز کرده‌ایم) باقی می‌ماند. اکنون، فرض می‌کنیم، ۱۹۸۶ نفرروی محیط دایره ایستاده باشند. ازنفراول آغازمی‌کنیم، دورمی‌زنیم تا ۹۶۲ نفر از دایره خارج شوند. دراین لحظه به‌اندازهٔ

$$1986 - 962 = 1024 = 2^{10}$$

نفرباقی مانده است، که شمارهٔ نفراول آن، شمارهٔ ردیف

$$2 \times 962 + 1 = 1925$$

در ردیف اولیه است؛ و همین شخص، تا آخربازی باقی می‌ماند.

▽ درحالت‌کلی، وقتی N نفر دور دایره ایستاده باشند، می‌توان نفر باقی مانده را، به‌سادگی، به‌کمك عدد نویسی درمبنای ۲ به‌دست‌آورد: کافی است عدد N را درمبنای ۲ بنویسیم و، سپس، نخستین رقم آن را (رقم سمت چپ‌که برابر واحد است) به‌آخرعدد ببریم. شمارهٔ نفرباقی مانده در عددنویسی به‌مبنای ۲ به‌دست می‌آید. مثلاً

$a)$ $(64)_{10} = (1000000)_2 \to (0000001)_2 = 1;$

$b)$ $(1986)_{10} = (11111000010)_2 \to (11110000101)_2 = 1925$

حل مسألهٔ کلی‌تر جالب است؛ وقتی که از دایره، نفر mام خارج شود (نفر $m-1$ام باقی می‌ماند).

مسألهٔ ۱۳۰۶. الف) پاسخ: ۰.

برای سادگی کار، $1=\bar{0}$ و $0=\bar{1}$ می‌گیریم.

$(n+1)$ امین جملهٔ دنباله را x_n می‌نامیم: $x_0=0$، $x_1=1$، $x_2=1$، و غیره. باید x_{1986} را پیدا کنیم.

ضمن ساختن دنباله، درهر گام، طول آن دوبرابر می‌شود. ببینیم جملهٔ x_{1986} درکدام گام ظاهر می‌شود؟ بعداز ۱۰ گام، به‌تعداد $1024=2^{10}$، جملهٔ دنباله به‌دست می‌آید، بنابراین باید ۱۱ گام برداشت. در گام یازدهم، باید همهٔ جمله‌های قبلی را نوشت، با این شرط که ۰ را به ۱ و ۱ را به ۰ تبدیل کنیم. بنابراین

$$x_{1986}=\bar{x}_{962},(1986-1024=962)$$

اگر به‌همین ترتیب استدلال کنیم، نتیجه می‌گیریم که

$$\bar{x}_{962}=x_{450},(962-2^9=450)$$

و غیره. سرانجام به‌این زنجیرهٔ برابری‌ها می‌رسیم:

$$x_{1986}=\bar{x}_{962}=x_{450}=\bar{x}_{194}=x_{66}=\bar{x}_2=x_0=0$$

∇ برای حل این مسأله، در واقع، از این خاصیت دنباله استفاده کرده‌ایم:

$$x_n=\bar{x}_{n-2^k}\ ,\ (2^k\leqslant n<2^{k+1}) \tag{1}$$

راه حل دیگر مسأله، این است که از ویژگی‌های زیر، برای دنبالهٔ مفروض، استفاده کنیم (و در بخش ب) مسأله هم، از آن‌ها استفاده کرده‌ایم). برای هر n داریم:

$$x_{2n}=x_n \tag{2}$$

$$x_{2n+1}=\bar{x}_{2n} \tag{3}$$

ب) پاسخ: متناوب نیست.

برای اثبات، ساختمان دنباله را به طریق دیگری تعریف می‌کنیم: ابتدا زوج (۰،۱) را می‌نویسیم، سپس به‌دنبال آن، زوج (۱،۰)، بعد دو زوج (۱،۰) و (۰،۱) و غیره. درهر گام، تعداد زوج عددها برابراست با تعداد زوج‌عددهایی که قبل‌آن نوشته شده است، با این تفاوت‌که (۰،۱) را به(۱،۰)، و (۱،۰) را به (۰،۱) تبدیل می‌کنیم.

اکنون، فرض می‌کنیم، دنبالهٔ مفروض، متناوب باشد و کوچکترین دورهٔ تناوب آن را به‌طول k می‌گیریم.

ابتدا، k را عددی‌زوج‌فرض‌می‌کنیم: $k=۲\rho$. متناوب بودن دنباله، به‌این معناست که، عدد طبیعی N وجود دارد، به‌نحوی که برای هر$n \geqslant N$ داشته باشیم: $x_n = x_{n+۲\rho}$. ولی ازتعریف جدید دنباله نتیجه می‌شود که، اگردنباله را، به‌زوج‌های

$$(x_۰, x_۱); (x_۲, x_۳); \ldots; (x_{۲n}, x_{۲n+۱}); \ldots$$

تقسیم‌کنیم، آن وقت، جمله‌های اول همهٔ زوج‌ها، دنبالهٔ

$$x_۰, x_۲, x_۴, \ldots, x_{۲n}, \ldots$$

را تشکیل می‌دهند، که بردنبالهٔ اصلی منطبق است (ویژگی (۲)). از این جا به‌دست می‌آید:

$$x_n = x_{۲n} = x_{۲n+۲\rho} = x_{۲(n+\rho)} = x_{n+\rho}$$

یعنی ρ دورهٔ تناوب دنباله است و این، فرض ما را، مبنی براین‌که ۲ρ کوچکترین دورهٔ تناوب است، نقض می‌کند.

اکنون $k=۲\rho+۱$ را، عددی فرد می‌گیریم. دراین صورت، در دوری از دنباله به‌طول k، تعداد مختلفی صفر و واحد وجود دارد. فرض می‌کنیم، تعداد واحدها بیشترو، دست‌کم، برابر $\rho+۱$ باشد (حالتی را هم که، درآن، تعداد صفرها بیشتراست، به‌همین ترتیب می‌توان بررسی‌کرد).

بخشی ازدنباله‌به‌طول $۲k$ را درنظرمی‌گیریم. دراین بخش، دست‌کم $۲\rho+۲$ واحد وجود دارد وتعداد صفرها از ۲ρ تجاوزنمی‌کند، یعنی تعداد

واحدهـا، دست‌کم دوتـا بیشتر است. ولـی، بنابـر ویـژگی (۳) داریـم: $x_{2n+1}=\bar{x}_{2n}$. بنابراین، درتمامی این‌دور دنبالهٔ ما، باآغاز از x_{2m}، تعداد واحد ازتعداد صفرها، بیش‌ازیکی‌اختلاف‌ندارد؛ یعنی‌دنباله، نامتناوب‌است.

∇ این دنباله را، دنبالهٔ مورس می‌نامند واغلب، درشاخه‌های مختلف ریاضیات، با آن برخورد می‌کنیم (مسألهٔ ۱۸.۶ را ببینید).

جملهٔ عمومی این دنباله را، می‌توان این طور تعریف‌کرد: عدد n را درعدد نویسی به‌مبنای ۲ می‌نویسیم؛ اگرتعداد واحدها درآن، عددی زوج باشد داریم: $x_n=0$؛ و اگرتعداد واحدها فرد باشدآن‌وقت $x_n=1$.

دنبالهٔ مشابهی را می‌توان با سه تایی ۰۰۱ درست‌کرد:

$$001001110001001110110110001\ldots$$

این دنباله را «ردیف نامتناهی والس» گویند؛ وقتی‌که نگـاه خود را روی آن بلغزانیم، مثل این است‌که ملودی والس را می‌شنویم.

نظریهٔ ترکیب کولموگوروف در مورد این دنباله‌ها صدق می‌کند: این دو دنباله، که به‌هیچ وجـه تصادفی نیستند، ویژگی‌هایی دارندکه می‌توان آن‌ها را ازجدول عددهای تصادفی به‌دست‌آورد. مثلاً، سهم واحدها، در k جملهٔ اول هر یك از این دو دنباله، به ازای $k\to\infty$، به‌سمت $\frac{1}{2}$ میـل می‌کند.

مسألهٔ ۱۴.۶. پاسخ: یا A عدد ۲۰ و B عدد ۲۱؛ ویا A عدد ۲۱ و B عدد ۲۲.

∇ برای حل این مسأله، در واقع، چنین استدلال می‌کنیم‌که: «A فکر می‌کند $B\rho$ فکرمی‌کندکه...». این‌گونه بازتاب‌های تکراری حقیقت درذهن افراد (شبیه بازتاب‌های تکراری در آینه‌ها)، علاقهٔ بسیاری از دانشمندان را درسال‌های اخیربه‌خود جلب کرده است وآن‌ها را «برگشت‌های بازتابی» نامیده‌اند [واژهٔ لاتینی refleocus ، به‌معنای «بازتابی»].

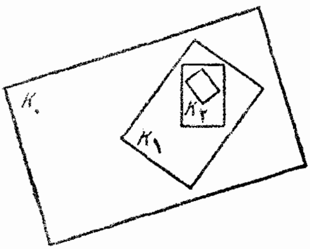
جدول صفحهٔ بعد نشان می‌دهدکه چگونه می‌توان، ضمن گفت وگوی A و B، نتیجهٔ لازم را به‌دست‌آورد.

شمارهٔ گفت‌وگو	گفت و گو	نتیجهٔ گفت و گو	استدلال
۱_A	A: «من نمی‌دانم چه عددی نزد شماست».	عدد ۱، نزد A نیست.	درغیراین صورت A متوجه می‌شد که عدد B، برابر ۲ است.
۱_B	B: «نمی‌دانم چه عددی نزد شماست».	عدد ۱ یا عدد ۲، نزد B نیست.	اگر B عدد ۱ را داشته باشد، متوجه می‌شود که A عدد ۲ را دارد؛ و اگر B عدد ۲ را داشته باشد، با به‌حساب آوردن نتیجهٔ گفت و گوی اول، B متوجه می‌شود که A دارای عدد ۳ است.
۲_A	A: «نمی‌دانم چه عددی نزد شماست».	A، عدد ۱، یا ۲ یا ۳ را ندارد.	درغیراین صورت، A متوجه می‌شد (با به حساب آوردن آگاهی‌های قبلی) که B، به ترتیب، دارای عدد ۳ یا ۴ است.
۲_B	B: «نمی‌دانم چه عددی پیش شماست».	عددهای ۱، ۲، ۳ یا ۴ نزد B نیست.	
. . .	. . . . . .	. . . . .	. . . .
۱۰_A	A: «نمی‌دانم...»	عددهای ۱، ۲، ...، ۱۹ نزد A نیست.	

ادامهٔ جدول

10_B	B: «نمی‌دانم...»	عددهای ۱، ۲، ...، ۲۰ نزد B نیست.
11_A	A: «می‌دانم چه‌عددی نزد شماست».	اگر ۲۰ نزد A باشد، B عدد ۲۱ دارد و اگر ۲۱ نزد A باشد، B عدد ۲۲ دارد.

مسألهٔ ۱۵۰۶. نگاشت f را درنظر می‌گیریم که، به ازای آن، کارت بزرگ K_0 را به‌کارت کوچکتر K_1 منجر می‌کند. هرنقطهٔ واقع برکارت K_0 $(K_0 \supset K_1)$، متناظربا نقطه‌ای از کارت K_1 است. تصویرکارت K_1 را، درهمین نگاشت، K_2 می‌نامیم (شکل ۸۰) و، به‌طورکلی، فرض می‌کنیم:



شکل ۸۰

$$f(K_{n-1}) = K_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

مستطیل‌های K_0، K_1، K_2، ...، K_n، ...، درست یک نقطهٔ مشترک x دارند، زیرا بعدهای مستطیل‌ها، به‌سمت صفر میل می‌کنند.

نقطهٔ x، همان نقطه‌ای است که باید سوراخ شود. در واقع، از این حقیقت که $x \in K_{n-1}$ که، برای هر n داریم: $f(x) \in K_n$. به‌جزاین، نقطهٔ $f(x)$، به‌همهٔ مستطیل‌ها تعلق دارد و چنین نقطه‌ای منحصر به‌فرد است؛ پس $x = f(x)$.

▽ به‌طور کلی، این قضیه درست است:

هر نگاشت پیوسته مستطیل روی خودش، دارای نقطه‌ای بی‌حرکت است.

ـ این ترتیب، حتی اگر یکی از کارت‌ها را مچاله کنیم و روی کارت دیگر قرار دهیم، بازهم حکم مسألهٔ ۱۵.۶ درست است.

مسألهٔ ۱۵.۶ را (وقتی که کارت مچاله نشده است)، می‌توان با روش دیگری هم حل کرد. می‌توان کارت کوچکتر را، نتیجه‌ای از ترکیب یك تجانس و یك دوران دانست. اگر صفحه‌ای را که این دو کارت روی آن واقع‌اند، به‌عنوان صفحهٔ مختلط در نظر بگیریم، آن وقت این تبدیل، به‌وسیلهٔ تابع خطی $w(z)=qz+b$ مشخص می‌شود که، در آن، q، b و z عددهایی مختلط‌اند و $q\neq 0$ و $q\neq 1$.

در این صورت، نقطهٔ بی‌حرکت z_0، عبارت است از جواب معادلهٔ $z=qz+b$، یعنی $z_0=\frac{b}{1-q}$.

مسألهٔ ۱۶.۶. پاسخ: این حد برابر است با $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

دنبالهٔ مفروض (a_n)، با این شرط تعریف شده است:

$$a_1=\sqrt{1},\quad a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$$

ابتدا فرض می‌کنیم، این دنباله دارای حدی برابر τ باشد. چون

$$\text{حد}\, a_{n+1}=\text{حد}\, a_n=\tau$$

بنابراین، به برابری $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$ می‌رسیم (البته، در حد) و به‌دست می‌آید: $\tau=\sqrt{1+\tau}$. با مجذور کردن دو طرف این معادله، به معادلهٔ درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$\tau^2-\tau-1=0\quad,\quad(\tau>0)$$

این معادله، دو ریشه دارد: $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$. بنابراین

$$\tau=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

اکنون ثابت می‌کنیم، دنبالهٔ (a_n) به‌طوریکنوا صعودی است و همهٔ جمله‌های آن، از τ تجاوز نمی‌کنند؛ ازآن جا، بنابه‌قضیهٔ وایرشتراس، وجود حد برای دنباله، نتیجه می‌شود. اثبات را، با روش استقرای ریاضی می‌دهیم.

روشن است که $a_۱<a_۲<\tau$، یعنی $۱<\sqrt{۱+\sqrt{۱}}<\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$.

(با مجذور کردن دوطرف نابرابری‌ها، درستی آن‌ها روشن می‌شود.)

اکنون‌فرض می‌کنیم، داشته باشیم: $a_{k-۱}<a_k<\tau$ وثابت می کنیم، دراین صورت $a_k<a_{k+۱}<\tau$.

نابرابری $a_k<a_{k+۱}$هم‌ارزاست با نابرابری $\sqrt{۱+a_{k-۱}}<\sqrt{۱+a_k}$
این نابرابری درست است، زیرا بنابرفرض استقرا $a_{k-۱}<a_k$.

نابرابری $a_{k+۱}<\tau$ یا $\sqrt{۱+a_k}<\tau$، هم‌ارزاست با نابرابری $a_k<\tau^۲-۱$. چون $\tau^۲-\tau-۱=۰$، بنابراین $\tau=\tau^۲-۱$ و در نتیجه $a_k<\tau$. اثبات با استقرای ریاضی، کامل شد.

∇ حد این دنباله را، به‌این جهت با حرف یونانی τ نشان دادیم که، معمولاً، عدد معروف $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ را با این حرف‌نشان می‌دهند(مسألهٔ ۱۴.۳ را ببینید).

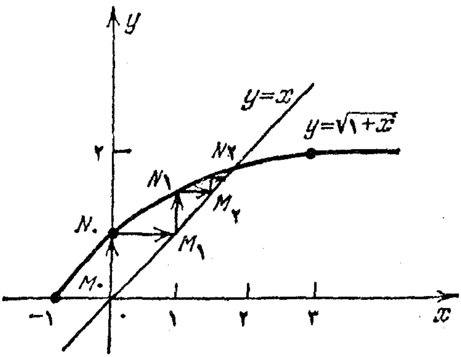
اگرتابع $f(x)=\sqrt{۱+x}$ را درنظربگیریم، آن وقت دنبالهٔ مسألهٔ ۱۶.۶ را، می‌توان این طورتعریف کرد:

$$f(۰),\ f(f(۰)),\ f(f(f(۰))),\ldots$$

رفتار دنبالهٔ به‌صورت

$$x_0 \ , \ f(x_0) \ , \ f(f(x_0)) , \ f(f(f(x_0)))$$

را می‌توان به‌سادگی و به‌کمک نمودار، مورد مطالعه قرارداد. نمودار تابع $y=f(x)$ و خط راست $y=x$ را، روی دستگاهی از محورهای مختصات رسم می‌کنیم. دراین‌صورت، دنبالهٔ ما متناظراست با روندی‌هندسی که درشکل ۱۸ نشان داده شده است: ازنقطهٔ $M_0(x_0, 0)$ واقع برمحورOx، خط‌راست قائمی رسم می‌کنیم تا نمودارتابع $y=f(x)$ را قطع کند. ازاین نقطه، خط راستی‌افقی می‌گذرانیم تاخط‌راست$y=x$ را درنقطهٔ $M_1(f(x_0), f(x_0))$ قطع کند. دوباره از ایـن نقطه، خط راست قـائمی رسم می‌کنیم تـا نمودار تابع$y=f(x)$را درنقطهٔ$N_1(f(x_0), f(f(x_0)))$قطع کندوغیره.طول‌های نقطه‌های N_0، N_1، ... (یا عرض‌های نقطه‌های M_0، M_1، ...)، جمله‌های دنبالهٔ ما را تشکیل می‌دهند.



شکل ۸۱

درشکل ۸۱، نمودارتابع $f(x)=\sqrt{1+x}$ از مسألـهٔ ۱۶.۶ داده شده است. می‌بینیم، جمله‌های دنباله صعودی‌اند و به سمت τ میل می‌کنند که، درآن، τ برابراست باطول‌نقطهٔ‌برخورد نمودارتابع $f(x)=\sqrt{1+x}$ با خط راست $y=x$. اگرطبق دستور $x_{n+1}=\sqrt{1+x_n}$، جمله‌هـای این

دنباله را یکی پس ازدیگری محاسبه کنیم (با آغازاز $x_0 = 0$)، هربار بادقت بیشتری، ریشهٔ مثبت‌معادلهٔ $x^2 - x - 1 = 0$ به‌دست می‌آید. این‌مشاهده، روش زیر را، برای جواب تقریبی‌معادله روشن می‌کند. معادلهٔ $F(x) = 0$ را به‌صورت $x = f(x)$ می‌نویسیم. عدد x_0 را انتخاب می‌کنیم و، پشت سرهم، جمله‌های دنبالهٔ (x_n) را، بنابر دستور $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n \geqslant 1)$ به‌دست می‌آوریم. این روش پیدا کردن ریشهٔ معادله‌را، روش تکرار، یا روش تقریب‌های متوالی گویند.

مسألهٔ ۱۷.۶. پاسخ: $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

یادآوری می‌کنیم که، همهٔ جمله‌های دنباله، عددهایی مثبت‌اند و، در ضمن ، عدد $\tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$، ریشهٔ معادلهٔ $\tau = 1 + \frac{1}{\tau}$ است. جملهٔ kام دنباله را a_k می‌نامیم و ثابت می‌کنیم، اگر $a_k < \tau$، آن وقت $a_{k+1} > \tau$ و $a_{k+2} < \tau$.

ازنابرابری $a_k < \tau$، این نابرابری‌ها نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{a_k} > \frac{1}{\tau};\quad a_{k+1} = 1 + \frac{1}{a_k} > 1 + \frac{1}{\tau} = \tau;$$

$$\frac{1}{a_{k+1}} < \frac{1}{\tau};\quad a_{k+2} = 1 + \frac{1}{a_{k+1}} < 1 + \frac{1}{\tau} = \tau$$

∇ تابع $f(x) = x + \frac{1}{x}$ را درنظرمی‌گیریم. دنبالهٔ مسألهٔ ۱۷.۶، عبارت است ازدنبالهٔ $f(1)$، $f(f(1))$، ... رفتاراین دنباله را، می‌توان به‌کمک نمودار و شبیه مسألهٔ قبل روشن کرد (شکل ۸۲).

برای علاقه‌مندان. حتماً توجه کرده‌اید که دنبالهٔ مربوط به‌مسألهٔ ۱۷.۶ را، می‌توان به‌صورت

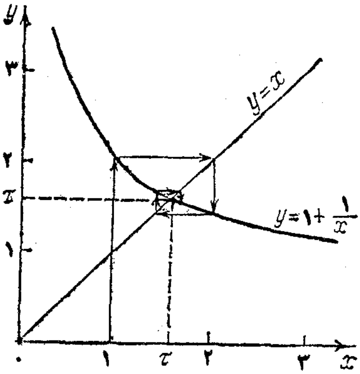
$$a_n = \frac{F_{n+k}}{F_n}$$

تعریف کرد که، در آن، F_k، همان جملهٔ kام دنبالهٔ فیبوناچی است (بررسی مسألهٔ ۱۱.۶ را ببینید). بنابراین (a_n) را می‌توان این طور تعریف کرد:

$$۱، ۱+\frac{۱}{۱}، ۱+\frac{۱}{۱+۱}،$$

$$۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+۱}}، \ldots$$

یعنی تبدیل عدد τ، به کسر مسلسل نامتناهی.



شکل ۸۲

مسألهٔ ۱۸.۶ پاسخ: $(۰،۲)$؛ $(۲،۰)$ و

$$(-۱+\sqrt{۵}، -۱+\sqrt{۵})؛ (-۱-\sqrt{۵}، -۱-\sqrt{۵})$$

$y=\frac{۱}{۲}(۴-x^۲)$ را از معادلهٔ اول، درمعادلهٔ دوم قرارمی‌دهیم، به این معادلهٔ درجه چهارم می‌رسیم:

$$۲x=۴-\frac{۱}{۴}(۴-x^۲)^۲$$

ازآن جا $\frac{۱}{۴}x^۴-۲x^۲+۲x=۰$ ویا

$$x(x-۲)(x^۲+۲x-۴)=۰$$

که با حل‌آن، جواب‌ها به‌دست می‌آیند.

∇ دستگاه کلی‌تری را به‌صورت زیردرنظرمی‌گیریم:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ x=f(y) \end{cases}$$

[درمسألهٔ ۱۸.۶، داریم: $f(x)=\frac{۱}{۲}(۴-x^۲)$].

اگرمقدار y را، ازمعادلهٔ اول، درمعادلهٔ‌دوم‌دستگاه قراردهیم، مسألهٔ ما منجربه‌حل معادلهٔ $x=f(f(x))$ می‌شود.

روشن است، اگر x نقطه‌ای بی‌حرکت درنگاشت f باشد، یعنی داشته باشیم: $x=f(x)$، آن وقت $x=f(x)=f(f(x))$. بنابراین، بین ریشه‌های معادلهٔ $x=f(f(x))$، همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=x$ قرار دارند. درمسألهٔ ۱۸.۶، معادلهٔ $x=f(x)$ به صورت $x=\frac{۱}{۲}(۴-x^۲)$ است و ریشه‌های‌آن، یعنی $x=-۱\pm\sqrt{۵}$، دوجواب دستگاه اصلی را می‌دهند.

دو جواب دیگر آن، $x=۰$ و $x=۲$، «دوری» با دورهٔ تناوب ۲ تشکیل می‌دهند.

برای علاقه‌مندان. این دستگاه کلی‌تر را درنظرمی‌گیریم:

$$\left\{\begin{array}{l} ۲x_۲=a-x_۱^۲ \\ ۲x_۳=a-x_۲^۲ \\ \cdots\cdots\cdots \\ ۲x_p=a-x_{p-۱}^۲ \\ ۲x_۱=a-x_p^۲ \end{array}\right. \qquad (*)$$

نگاشت $x\rightarrow\frac{۱}{۲}(a-x^۲)$ را با f، و n بار تکرار این نگاشت را، با f^n نشان می‌دهیم. دنبالهٔ

$$x_۰, f(x_۰), f(f(x_۰)), \ldots, f^n(x_۰), \ldots$$

را مدار نقطهٔ $x_۰$ درنگاشت f می‌نامیم.

مدارنقطهٔ $x_۰$ را متناوب گوییم (با دورهٔ تناوب p)، وقتی‌که به‌ازای

$1 \leqslant k < p$ داشته باشیم؛ $f_p(x_0)=x_0$ و $f_k(x_0) \neq x_0$.

دستگاه (*)، به‌معادلهٔ جبری $f^p(x)=x$ از درجهٔ 2^p منجر می‌شود. این مطلب راکه، آیا این دستگاه دارای جواب $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ با p عدد مختلف است (به‌ازای مقدارهای مفروض پارامتر a)، می‌توان به‌این‌ترتیب تنظیم کرد: آیا نگاشت f، مداری با دورهٔ تناوب p دارد؟ این پرسش و، به‌طور کلی، مسألهٔ تکرار تابع‌های پیوسته، درسال‌های اخیر درمرکز توجه بسیاری از ریاضی‌دانان قرار گرفته و کارهای زیادی دربارهٔ آن‌ها انجام شده است.

روی نمونهٔ خانوادهٔ نگاشت $f_a(x)=\frac{1}{2}(a-x^2)$ $(0 \leqslant a \leqslant 8)$، می‌توان پدیده‌های جالب بسیاری پیدا کرد که ضمن تکرار نگاشت یك بازهٔ بسته برخودش و، به خصوص، ضمن مطالعهٔ رفتار مدار نقطه‌های مختلف به‌دست می‌آیند.

به‌سادگی دیده می‌شود که، نگاشت f_a، به ازای $0 \leqslant a \leqslant 8$، بازهٔ بستهٔ $[-1-\sqrt{1+a}, -1+\sqrt{1+a}]$ را بـه‌خودش منجر می‌کند و «مداری با دورهٔ تناوب ۱» دارد، یعنی دارای دو نقطهٔ بی‌حرکت $x=-1 \pm \sqrt{1+a}$ است. به‌ازای $0 \leqslant a \leqslant 3$، نگاشت f_a، مدار متناوب دیگری ندارد. می‌توان ثابت کرد که، با ترقی a، مدارهای دیگری با دورهٔ تناوب‌های دیگرظاهرمی‌شوند: به‌ازای $a > a_1 = 3$، با دورهٔ تناوب ۲، به ازای $a > a_2 = 5$، با دورهٔ تناوب ۴، به‌ازای $a > a_3 = 5/47\ldots$ با دورهٔ تناوب ۸ و غیره. بـه‌طور کلی، دنبالـهٔ صعودی عددهای a_m وجود دارد، به‌نحوی که، به ازای $a_m < a \leqslant a_{m+1}$، نگاشت دارای مدارهایی با دوره‌های تناوب ۱، ۲، 2^2، …، 2^m است و مداری با دورهٔ تناوب دیگری ندارد. این دنباله، به‌سمت مقداربحرانی

$$a_\infty = 5/6046\ldots$$

متقارب است (که به کمك کامپیوتر به‌دست‌آمده است) و، بعد ازآن، خصلت

مدارها، به‌شدت‌دچارتغییرمی‌شود. دراین میان، دنبالهٔ تفاضل‌های $a_m - a_\infty$؛ به‌تقریب، همچون یك تصاعد هندسی باقدرنسبت $\lambda = (۴/۶۶۹۲۰...)^{-۱}$ نشان می‌دهد. (دربسیاری از خانواده‌های نگاشت‌های پیوستهٔ دیگر هم، دنباله‌هایی برای مقدارهای پارامتر a_m بـه‌وجود می‌آید که، برای آن‌ها، دوره‌های تناوب دوبرابرمی‌شوند و به‌سمت مقدار بحرانی a_∞ میل می‌کنند؛ درضمن همیشه تفاضل $a_m - a_\infty$، مثل تصاعد $b_m = c\lambda^m$، به‌سمت صفرمیل می‌کند: یعنی نسبت $\frac{a_m - a_{m-۱}}{a_{m+۱} - a_m}$ همیشه به‌سمت حدλ میل می‌کندکه آن‌را، ثابت فی‌گن‌باآوم می‌نامند.)

برای $a < a_\infty$، رفتارمدارهای تقریباً همهٔ نقطه‌های x، به طورنسبی ساده است: اگـر $a_m < a \leqslant a_{m+۱}$، آن‌وقت بـه‌مداری با دورهٔ تناوب ۲^m نزدیك‌می‌شود. به‌زبان‌دیگر، برای $p = ۲^m$ و $a < a_{m+۱}$، یکی‌ازجواب‌های دستگاه معادله‌های (*)، را می‌توان با روش تقریب‌های متوالی به دست آورد.

مثلاً، برای تابع $f_۴(x) = \frac{۱}{۲}(۴ - x^۲)$ درمسألهٔ ۱۸.۶، به‌سادگی قانع‌می‌شویم‌که مدارهرنقطهٔ $x \in [-۲،۲]$ به‌مدارصفر (...۰،۲،۰،۲،۰) با دورهٔ تناوب ۲ نزدیك می‌شود.

به‌ازای $a \geqslant a_\infty$، وضع به سرعت بغرنج می‌شود: مدارهای بسیاری ازنقطه‌های x، کاملاً بی‌نظم و به‌صورتی پریشان، نسبت به‌زیرمجموعه‌ای نامتناهی ازبازه درمی‌آیند. مثلاً، به‌ازای $a = a_\infty$، مدارصفر، به‌سمت هیچ مدارمتناوبی نزدیك نمی‌شود؛ به جز آن، حتی دنبالهٔ (θ_n) علامت‌های این عددها، دارای تناوب نیست و ساختمانی بغرنج دارد (جدول را ببینید).

توجه به‌این نکته جالب است که دنبالهٔ مثبت و منفی‌های θ_n، ارتباط نزدیکی با دنبالهٔ مورس ازمسألهٔ ۱۳.۶ دارد. معلوم شده است که، اگرزیر هردوجملهٔ مجاور دنبالـهٔ مورس، بـه‌شرط مختلف بودن دو جمله، علامت «+» و به‌شرط یکی بودن دوجمله، علامت «−» را قراردهیم، دنبالهٔ θ_n

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...
$f^n(0)$	۲/۸۰...	−۱/۱۲...	۲/۱۷...	۰/۴۴...	۲/۷۰...	−۰/۸۴...	...
θ_n	+	−	+	+	+	−	...

با دقت کامل به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\ + & - & + & + & + & - & + & - & + & - & + & + & + & & \ldots \end{array}$$

به‌ازای $a>a_\infty$، برای نگاشت f_a، مدارهای متناوبی به‌دست می‌آید که، علاوه بر 2^p، دورهٔ تناوب‌های دیگری هم ظاهر می‌کنند. برای این‌که روشن شود، کدام یك ازدوره‌های تناوب می‌توانند برای مدارهای نگاشت مفروض درنظر گرفته شوند، ازقضیهٔ شارکووسکی استفاده می‌کنند.

همهٔ عددهای طبیعی، به‌این ترتیب منظم می‌شوند:

$$\underbrace{3, 5, 7, \ldots}_{\text{فردها}};\ \underbrace{3\times 2, 5\times 2, 7\times 2, \ldots}_{\text{فردها}\times 2};$$

$$\underbrace{3\times 2^2, 5\times 2^2, 7\times 2^2, \ldots}_{\text{فردها}\times 4}; \ldots; \underbrace{\ldots 2^3, 2^2, 2, 1}_{\text{توان‌های } 2}$$

دراین صورت، برای هردوعدد طبیعی، می‌توان گفت، کدام یك درسمت چپ وکدام یك درسمت راست قرار دارد. اگرنگاشت پیوستهٔ بازه‌ای برروی خودش، مداری با دورهٔ تناوب r داشته باشد، آن وقت دارای مدارهایی با همه دورهای تناوبی است که درسمت راست r واقع‌اند.

مثلاً، عدد ۳ درسمت چپ همهٔ عددها قراردارد و، بنابراین، نگاشتی که دارای مداری با دورهٔ تناوب ۳ است، دارای مدارهایی با همهٔ دوره‌های تناوب خواهد بود.

نتیجه‌گیری‌های دیگری هم وجود داردکه، به‌کمك آن‌ها، می‌توان در

رابطه با پارامتر، ویژگی‌های تکرار را در خانواده‌های نگاشت‌های پیوستهٔ یك بازه بر روی خودش، تغییرداد. ولی بسیاری از مشاهده‌هایی که به‌کمك کامپیوتردست داده‌اند، هنوز درانتظار روشن شدن خود هستند.

مسأله‌هایی برای کارمستقل دانش‌آموزان

۰۱۹.۶ الف) مطلوب است ۱۹۸۶- امین رقم بعد از ممیز، در بیان دهدهی عدد $\frac{1}{31}$.

ب) به‌ازای چه‌مقداری از $m<31$، دورهٔ تناوب کسردهدهی $\frac{m}{31}$، ازهمان رقم‌های دورهٔ تناوب کسردهدهی $\frac{1}{31}$ تشکیل شده است؟

۰۲۰.۶ الف) معلم ازدانش‌آموزخواست ۱۹ را بر۷۳ تقسیم کند. صدمین رقم بعد ازممیزچند است؟

ب) n عددی‌است درست و $0<n<73$. عدد $\frac{n}{73}$ را به‌کسردهدهی نامتناهی تبدیل کرده‌ایم. ثابت کنید، دراین‌کسر، نمی‌توان به‌دو رقم مساوی برخوردکردکه درکنارهم باشند.

ج) همهٔ عددهای اول p را پیداکنیدکه، برای آن‌ها، درتبدیل $\frac{n}{p}$ به کسردهدهی $(0<n<p)$، هرگز دو رقم مساوی، مجاورهم نباشند.

۰۲۱.۶ دنبالهٔ (a_n) به‌این ترتیب داده شده است:

$$a_1=7،\ a_{n+1}=(\text{مجموع رقم‌های عدد } a_n^2)$$

a_{1000} را پیدا کنید.

۰۲۲.۶ دنبالهٔ (a_n)، با این تعریف داده شده است:

$$a_1=\text{عددی طبیعی}،\ a_{n+1}=(\text{مجموع مجذورهای رقم‌های عدد } a_n)،(n\geqslant 1)$$

ثابت کنید، در این دنباله، به‌ناچار با یکی از عددهای ۱ یا ۸۹ برخورد می‌کنیم.

۲۳.۶. دو جملهٔ اول دنبالهٔ (x_n) با دو عدد $x_1 \neq 0$ و $x_2 \neq 0$ و شرط $x_{n+1} = kx_n - x_{n-1}$ داده شده است. آیا این دنباله، دورهٔ تناوب دارد، به شرطی که: الف) $k=\sqrt{2}$؛ ب) $k=\sqrt{3}$؛ ج) $k=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$؛ د) $k=\frac{3}{2}$؟

۲۴.۶. گروه دانشجویان، یک مادهٔ درسی را، پنج بار امتحان می‌دهند (کسی که در امتحان موفق نشود، برای روز بعد، دوباره خود را آماده می‌کند). در هر جلسه، یک سوم دانشجویان حاضر به اضافهٔ $\frac{1}{3}$ دانشجو، امتحان خود را با موفقیت می‌گذرانند. حداقل تعداد دانشجویان چند نفر می‌تواند باشد تا در پایان روز پنجم، کسی برای امتحان باقی نمانده باشد؟

۲۵.۶. ساکنان دو جزیرهٔ چونگا و چانگا، سالی یک‌بار در هنگام جشن، کالاهای پرقیمت را عوض می‌کنند. ساکنان چونگا، نصف کالاهای پرقیمت خود را به جزیرهٔ چانگا، و ساکنان چانگا در همان زمان، یک‌سوم کالاهای پرقیمت خود را به جزیرهٔ چونگا می‌آورند. این رسم، از زمان‌های قدیم، ادامه داشته است. چه بخشی از کالاهای پرقیمت، در هر یک از جزیره‌ها وجود دارد؟ (در این مدت، هیچ کالای پرقیمت تازه‌ای پیدا نکرده‌اند و، در ضمن، هیچ کالای پرقیمتی را هم، از دست نداده‌اند.)

۲۶.۶. این دستگاه را حل کنید:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 - x_2^2;\\
x_2 &= 1 - x_3^2;\\
x_3 &= 1 - x_4^2;\\
&\cdots\cdots\\
x_{n-1} &= 1 - x_n^2;\\
x_n &= 1 - x_1^2
\end{aligned}
$$

۶.۲۷. جملهٔ صدم x_{100} از دنبالهٔ (x_n) را بادقت تا ۰/۰۱ پیدا کنید، به‌شرطی که:

الف) $x_1 \in [0,1]$، $x_{n+1} = x_n(1-x_n)$ $(n>1)$؛

ب) $x_1 \in [0/1, 0/9]$، $x_{n+1} = 2x_n(1-x_n)$ $(n>1)$.

۶.۲۸. دنبالهٔ چند جمله‌ای‌های

$$P_0(x) = 1,\ \ P_1(x) = x,\ \ P_2(x) = x^2 - 1, \ldots$$

با شرط

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$$

داده شده است. ثابت کنید، معادلهٔ $P_{100}(x) = 0$، ۱۰۰ ریشهٔ مختلف حقیقی دارد.

۶.۲۹. مورچه روی خط شکستهٔ $H_0H_1H_2H_3\ldots$ شامل بی‌نهایت ضلع H_0H_1، H_1H_2، H_2H_3، ... حرکت می‌کند. طول ضلع‌های H_0H_1، H_1H_2 و H_0H_2، به‌ترتیب برابرند با ۵، ۴ و ۳ سانتی‌متر و H_nH_{n+1} عمودی است که از نقطهٔ H_n برپاره خط راست $H_{n-2}H_{n-1}$ فرودآمده است $(n = 2, 3, 4, \ldots)$.

الف) طول مسیرمورچه چقدراست؟

ب) نقطه‌ای که مورچه روی‌آن حرکت می‌کند، از پاره‌خط‌های راست H_0H_2 و H_0H_1 به‌چه‌فاصله‌ای است؟

۶.۳۰. $A_0B_0C_0$ را مثلثی با ضلع‌های a، b و c می‌گیریم. دنباله‌ای ازمثلث‌های $A_1B_1C_1$، $A_2B_2C_2$، ... را طوری ساخته‌ایم که طول ضلع‌های هرمثلث $A_nB_nC_n$ برابربا میانه‌های مثلث قبلی‌آن $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ باشد. مطلوب است طول ضلع‌های مثلث $A_{1000}B_{1000}C_{1000}$.

۶.۳۱. در دایره‌ای به شعاع واحد یك مربع محاط کرده‌ایم. سپس در مربع، یك دایره، دردایره، یك ۸ ضلعی منتظم، در۸ ضلعی منتظم یك دایره، در دایره، یك ۱۶ ضلعی منتظم و غیره محاط کرده‌ایم؛ در دایرهٔ nام، 2^{n+1}

ضلعی منتظم محاط شده است. ثابت کنید، شعاع همهٔ دایره‌ها از $\frac{۲}{\pi}$ بزرگتر است.

۳۲۰۶. دنبالهٔ (a_n) به‌این صورت تعریف شده است:

$$a_۱=۱،\ \ a_{n+۱}=a_n+\frac{۱}{a_n^۲}$$

ثابت کنید:

الف) این دنباله محدود نیست؛

ب) $a_{۹۰۰۰}>۳۰$؛

ج) حد $\frac{a_n}{\sqrt[۳]{n}}$ را، وقتی n به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند، پیدا کنید.

۳۳۰۶. دنبالهٔ (a_n)، این طورتعریف شده است:

$$a_۱=۱،\ \ a_{n+۱}=\frac{۳a_n}{۴}+\frac{۱}{a_n}$$

ثابت کنید:

الف) این دنباله محدود است؛

ب) $|a_{۱۰۰۰}-۲|<\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱۰۰۰}$.

۳۴۰۶. مطلوب است حد دنبالهٔ (a_n)، به‌شرطی که

$$a_۱=۲،\ a_{n+۱}=\frac{a_n}{۲}+\frac{a_n^۲}{۸}$$

۳۵۰۶. از سه‌عدد a، b و c، سه‌عدد جدید می‌سازیم:

$$|a-b|،|b-c|،|c-a|$$

سپس از سه‌عدد اخیر و با همان روش، سه‌عدد جدید می‌سازیم و غیره. آیا همیشه، دربین عددهایی که به‌این ترتیب به‌دست می‌آیند، عدد ۰ وجود دارد، به‌شرطی که a و b و c

الف) عددهایی درست باشند؛

ب) عددهایی حقیقی باشند؟

ج) به‌همین پرسش‌ها، دربارهٔ عمل مشابهی برای چهار عدد پاسخ بدهید:

$$(a, b, c, d) \rightarrow (|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$$

۳۶.۶. درشهری n نفر و هرنفر درخانه‌ای زندگی می‌کنند. ساکنان شهرتصمیم گرفتند، خانه‌های خود را عوض‌کنند. بعد ازتعویض، معلوم شد که فاصله‌های بین خانه‌های هر دو نفر، از فاصله‌ای‌که قبلاً با هم داشتند، کمتر نیست. ثابت‌کنید، ضمن این جابه‌جایی، فاصلهٔ بین خانه‌های هردونفر، تغییرنکرده است.

۳۷.۶. ردیفی ازهمهٔ عددهای مضرب ۹ نوشته شده است:

۹، ۱۸، ۲۷، ۳۶، ۴۵، ۵۴، ۶۳، ۷۲، ۸۱، ۹۰، ۹۹، ۱۰۸، ۱۱۷، ...

برای هرکدام ازاین عددها، مجموع رقمها را پیداکرده‌ایم:

۹، ۹، ۹، ۹، ۹، ۹، ۹، ۹، ۹، ۹، ۱۸، ۹، ۹، ... (*)

می‌خواهیم، قانونی پیدا کنیم‌که، طبق‌آن، بتوانیم دنبالهٔ (*) را بنویسیم. درچه ردیفی، عدد ۸۱ ظاهرمی‌شود، و عدد بعد ازآن چند است؟ قبل از آن، درکجا در این دنباله، با چهارعدد متوالی ۲۷ یا سه عدد متوالی ۳۶ برخورد می‌کنیم؟

۳۸.۶. روی محورعددی، پاره خط راست از ۰ تا ۱ را به رنگ سبز درآورده‌ایم. بعد، یك سوم وسط این پاره خط، یعنی، پاره‌خط $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ را با قرمز رنگ کرده‌ایم؛ سپس یک سوم وسط دو پاره‌خط باقی مانده را و بعد، یك سوم وسط چهارپاره‌خط باقی‌مانده را با قرمزرنگ کرده‌ایم وغیره. این عمل را، بی‌نهایت بار ادامه داده‌ایم.

الف) مجموع طول‌های پاره‌خط‌های راست قرمز را پیداکنید.

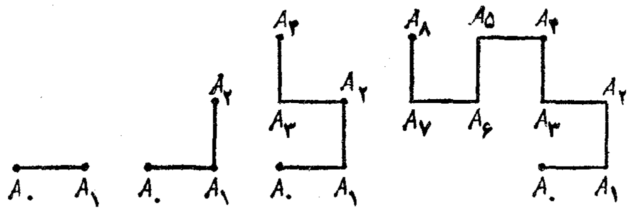
ب) ثابت‌کنید، نقطهٔ $\frac{1}{4}$، تا پایان به‌رنگ سبزباقی می‌ماند.

ج) ازمجموع $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+\ldots$، به‌صورتی دلخواه، بی‌نهایت جمله را طوری حذف‌کنیدکه باز هم بی‌نهایت جمله باقی بماند؛

ثابت کنید، مجموع آن‌ها، عددی سبز رنگ است.

د) ثابت کنید، همهٔ بقیهٔ عددها (بین ۰ و ۱)، قرمز رنگ‌اند.

۳۹.۶. خط شکسته دراکون، به‌دنباله‌ای نامتناهی از پاره خط‌های راست $A_\circ A_۱$، $A_۱A_۲$، $A_۲A_۳$، ... گفته می‌شود که روی یك صفحه واقع و طبق قانون زیرساخته شده باشد. ابتدا دو نقطهٔ $A_\circ$ و $A_۱$ را، جدا از هم، انتخاب می‌کنیم. سپس، گام به گام، نقطه‌های بعدی را به‌دست می‌آوریم. در گام kام $(k=۱،۲،...)$، خط شکستهٔ $A_\circ A_۱...A_{۲^{k-۱}}$ را، که قبل از آن ساخته شده است، دور آخرین نقطهٔ آن، $A_{۲^{k-۱}}$، درجهت حرکت عقربه‌های ساعت، به‌اندازهٔ ۹۰ درجه دوران می‌دهیم. ضمن این دوران، $A_\circ$ به $A_{۲^k}$ و $A_۱$ به $A_{۲^k-۱}$ و، به‌طور کلی، A_m به $A_{۲^k-m}$ منتقل می‌شود: $m\in\{۰،۱،...،۲^{k-۱}-۱\}$. به‌این ترتیب، خط‌شکستهٔ $A_\circ A_۱...A_{۲^k}$ به‌دست می‌آید و، سپس، گام بعدی برداشته می‌شود (شکل ۸۳).



شکل ۸۳

الف) خط شکستهٔ $A_\circ A_۱...A_{۳۲}$ را بسازید.

ب) دستوری کلی برای دنبالهٔ فاصله‌های $A_\circ A_۱$، $A_\circ A_۲$، $A_\circ A_۴$، ...، $A_\circ A_{۲^k}$، ... پیدا کنید.

ج) ثابت کنید، خط شکستهٔ دراکون، حتی از یك پاره‌خط راست، دوبار نمی‌گذرد.

د) خط شکستهٔ دراکون را می‌توان به‌سادگی، روی صفحهٔ کاغذ شطرنجی رسم کرد (هرضلع خط شکسته، ضلعی از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی است). ثابت کنید، اگراز یك گره واقع برصفحهٔ شطرنجی، چهار خط شکستهٔ

نامتناهی دراکون را، درچهار جهت مختلف رسم کنیم، همهٔ پاره خطهای راست صفحهٔ شطرنجی نامتناهی، اشغال می‌شوند.

۴۰.۶. خانواده‌هایی که درخانه‌های با نمای سفید رنگ و قرمز رنگ زندگی می کنند، هرسال، نمای خانه‌های خود را رنگ می کنند. درضمن، تنها آن خانواده‌هایی، رنگ نمای خانهٔ خود را عوض می کنندکه، خانه‌های بیش ازنصف خانواده‌های دوست آن‌ها، رنگ دیگری داشته‌اند. ثابت کنید، زمانی فرا می‌رسدکه، با آغاز ازآن، رنگ برخی ازخانه‌ها دائماً بی‌تغییر می‌ماند و رنگ خانه‌های دیگر، هرسال عوض می‌شود.

راهنمایی برای حل مسأله‌های آخر فصل‌ها

۲۳.۲. باید روشن کرد، آیا معادلهٔ $13x+16y=300$، درمجموعهٔ عددهای درست غیرمنفی، جواب دارد یا نه! (حل مسأله‌های ۱.۲ و ۶.۲ را ببینید.)

۲۴.۲. نسبت محیط دو دایره برابراست با $\frac{۲۰}{۹}=\frac{۴۰}{۱۸}$. بنابراین، میخ، هر $\frac{۹}{۲۰}$ محیط دایرهٔ بزرگتررا علامت می‌گذارد (حل مسألهٔ ۸.۲ را ببینید).

۲۵.۲. حل مسأله‌های ۷.۲ و ۸.۲ را ببینید.

۲۶.۲. چون بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک ۳۶۰ و ۴۸ برابراست با ۲۴، پاسخ الف) منجربه‌این‌جا می‌شود که: آیا شکلی وجود دارد که، ضمن دوران دور نقطهٔ O، به اندازهٔ ۲۴ درجه برخودش منطبق شود، ولی در دوران به‌اندازهٔ ۹۰ درجه برخودش قرار نگیرد؟

۲۷.۲. حل مسألهٔ ۷.۲ را ببینید.

۲۸.۲. شبیه آلگوریتم اقلیدسی، با استفاده از گزاره‌های زیر، عمل کنید (حل مسألهٔ ۴.۲ را ببینید): بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد $a-b$ و b و، همچنین، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد $a+b$ و b، همان بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد a و b است؛ واگرعددهای a و

b فرد باشند، آن وقت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد $2^k.a$ و b هم با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد a و b برابراست.

∇ حذف تـوان‌های اضافی ۲، براساس انـدیشهٔ «آلگوریتم دودویی» برای جست و جوی بزرگترین مقسوم علیه مشترك، درعددنویسی به مبنای ۲، راحت‌تر ازآلگوریتم اقلیدس است.

۲۹.۲. حل مسألهٔ ۴.۲ را ببینید.

۳۰.۲. مجموع همهٔ عددهای خانه‌های مستطیل را، به‌دوطریق به‌دست آورید: «از روی سطرها» و «از روی ستون‌ها».

۳۱.۲. ب) حل مسألهٔ ۹.۲ و ۱۰.۲ را ببینید.

۳۳.۲. دربـرابـری $pq-p-q+1=6$، عبارت سمت چپ را، می‌توان به‌ضرب دوعامل تجزیه کرد.

۳۴.۲. ب) حل مسألهٔ ۱۰.۲ را ببینید.

۳۵.۲. ب) عدد n^3-1 بر $n-1$ بخش‌پذیراست.

۳۶.۲. الف) چند جمله‌ای $(y+1)^2-x^2$ را بـه‌ضرب دو عامـل تجزیه کنید، سپس، همهٔ حالت‌های تجزیـهٔ عدد ۱۲ به‌دوعدد درست را (بـه نحوی که هردوفرد یا هردو زوج باشند) درنظربگیرید.

۳۸.۲. حل مسأله‌های ۱۰.۲ و ۱۶.۲ را ببینید.

۳۹.۲. اگر m و n بـر ۵ بخش‌پـذیرنباشند، آن وقت m^4-n^4 بر ۵ بخش‌پذیرخواهد بـود. اگرباقی مانده‌های یك مجذورکامل (وتوان چهارم) یك عدد درست را بر۵ محاسبه‌کنید، به‌درستی این مطلب قانع می‌شوید.

۴۰.۲. a^k-1 را تجزیه‌کنید، ازدستورحل مسألهٔ ۱۷.۲، ب) استفاده کنید و توجـه داشته باشید کـه، باقی مانـدهٔ تقسیم a بـر k، برابر واحـد است.

۴۱.۲. سه رقم‌آخـرهرعدد طبیعـی بـزرگتراز ۱۰۰، همان سه‌رقمی است که درآخرتوان صدم سه رقم آخرآن به دست می‌آید (وحتی توان صدم رقم آخرآن).

۰۴۲۰۲ حل مسألهٔ ۱۳۰۲ را ببینید.

۰۴۳۰۲ حل مسألهٔ ۱۴۰۲ را ببینید.

۰۴۴۰۲ حل مسألهٔ ۱۵۰۲ را ببینید.

۰۴۵۰۲ الف) $(n^۲+۲)^۲-(۲n)^۲$ = $n^۴+۴$. ب) حل مسألهٔ ۱۸۰۲ را ببینید.

۰۴۷۰۲ کافی است ثابت کنیم، چند جمله‌ای مفروض، برهریك ازچند جمله‌ای‌های x، $x+۱$، $۲x+۱$ بخش‌پذیراست (قضیهٔ به‌زو؛ بحث مربوط به‌مسألهٔ ۱۷۰۲، ب) را ببینید).

۰۴۸۰۲ می‌توان ابتدا روشن کرد، به‌ازای چه‌مقدارهایی از a و b بر $x-۱$ بخش‌پذیراست و، سپس، عامل $x-۱$ را از آن جداکرد (حل مسألهٔ ۱۷۰۲ را هم ببینید).

∇ چندجمله‌ای $p(x)$، وقتی وتنها وقتی بر $(x-d)^۲$ بخش‌پذیراست که هم خود $p(x)$ وهم مشتق آن $p'(x)$ بر $x-d$ بخش‌پذیرباشند.

۰۴۹۰۲ چند جمله‌ای $f(x)$ را می‌توان این طور نوشت:

$$f(x)=g(x)(x-۱)(x-۲)+ax+b$$

اکنون می‌توان a و b را با توجه به‌قضیهٔ به‌زو پیداکرد (۱۷۰۲، ب) را ببینید).

۰۵۰۰۲ برای هرچندجمله‌ای $f(x)$ باضریب‌های درست، عدد $f(k)$، درحالت زوج بودن k ازنظر زوج وفرد بودن همان وضع $f(۰)$ را دارد و درحالت فرد بودن k، همان وضع $f(۱)$ را.

۰۵۱۰۲ اگرچند جمله‌ای با ضریب‌های درست، دارای ریشهٔ درست c باشد، آن وقت مقدار به‌ازای عدد درست d (برای $c\neq d$)، بر $d-c$ بخش‌پذیراست (حل مسألهٔ ۱۷۰۲، ب) را ببینید).

۰۵۲۰۲ یکی ازعامل‌ها باید از درجهٔ سوم (یاکمتر باشد). این عامل نمی‌تواند مقدار ۱ را درچهارنقطه یا بیشترقبول کند (این مطلب، نتیجه‌ای

از قضیهٔ به‌زواست). ثابت کنید، چند جمله‌ای درجهٔ سوم، نمی‌تواند به‌ازای سه عدد درست برابر ۱، و به‌ازای دوعدد درست برابر ۱ — شود.

۰۵۳۰۲ الف) اگرشبیه مسألهٔ ۴۰.۲ استدلال کنید، مـی‌تـوانید قانع شوید که، اگر $a^{5^m}+1$ بـر 5^m بخش‌پذیر بـاشد، آن وقت $a^{5^{m+1}}+1$ بر 5^{m+1} بخش‌پذیر خواهد بود.

۰۵۴۰۲ ردیف کارت‌ها را باید بـا توجه بـه‌زوج یا فرد بـودن تعداد کارت‌های هرنوع نوشت. حاصل‌ضرب k عددنخستین را x_k می‌نامیم. آن را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$x_k = 2^{\alpha_k} \cdot 3^{\beta_k} \cdot 5^{\gamma_k} \cdot 7^{\delta_k} \cdot y_k^2$$

که درآن، y_k، عددی طبیعی است و $S_k = (\alpha_k , \beta_k , \gamma_k , \delta_k)$، انتخابی از ۰ و ۱ است. S_m و S_{m+1} تنها دریـکی ازچهارمحل با هم اختلاف دارند. برای این که شرط مسأله برقرارباشد، بـاید هیچ کدام ازاین انتخاب‌ها، تنها شامل صفرهـا نباشند و هیچ دو انتخاب S_m و S_n، بـه‌ازای $m \neq n$، برهم منطبق نشوند. درواقع، اگرانتخاب S_k ازصفرها تشکیل شده باشد، آن‌وقت حاصل ضرب k عدد نخستین، مجذورکامل می‌شود؛ و اگردوانتخاب S_m و S_n، برای $m > n$ برهم منطبق‌باشند، آن‌وقت حاصل‌ضرب از $(n+1)$امین تا mامین عدد، مجذورکامل می‌شود.

الف) مسأله به‌این جا منجرمی‌شود: آیا می‌توان ردیفی از ۱۵ گروه غیرصفرچهارتایی از ۰ و ۱ طوری به‌دنبال هم نوشت، که هردو گروه مجاور تنها دریك محل با هم اختلاف داشته باشند و نخستین گروه شامل سه صفرو يك واحد باشد؟

ب) تعدادکل گروه‌های انتخابی را S بگیرید.

ج) این مسأله را، بـرای «علاقه‌مندان» می‌تـوان این‌طور تنظیم کرد: حداکثرتعداد یال‌ها درمکعب n بعدی را پیداکنیدکه بتوان‌آن‌ها را در زنجیره‌ای از یال‌ها قرار داد، به نحوی کـه هیچ دویالی ازیـك رأس خارج نشده باشد.

۰۵۵۰۲ اگر a و b نسبت به‌هم اول باشند، آن وقت روی هرخط راست $ax+by=c$ (c، عـددی درست است)، درخت رزییده است (مسألـه‌های ۲۰۲، ۶۰۲ و ۷۰۲ را ببینید).

۰۵۶۰۲ حل مسألهٔ ۲۱۰۲ را ببینید.

۰۵۷۰۲ برای اثبات می‌توان از دستورمربوط به‌تابع اویلرکه در بحث دنبال حل مسألهٔ ۸۰۲ آوردیم، استفاده کرد.

۰۵۸۰۲ ب) اثبات را می‌توان با استقرای ریاضی و باآغاز ازعدد ۵ یا ۶ به‌دست‌آورد.

▽ دنباله‌ای ازاین گـونه رقم‌ها که ازسمت چپ نامتناهی است، مثل $x=$ ...۳۷۶، در معادلهٔ $x^۲=x$ صدق می‌کند. بـه چنین عـددهایی، عدد بی‌آغاز می‌گوییم. معادلـهٔ $x^۲=x$، به جز دوریشهٔ $x=۰=...۰۰۰$ و $x=۱=...۰۰۱$، دو ریشهٔ دیگرهم دارد.*

۰۵۹۰۲ $(x_۰, y_۰, z_۰)$ را جوابی‌ازمعادله فرض‌کنید دراین صورت، هر سه‌تایی دیگری‌هم که ازتبدیل $x_۰$، $y_۰$، $z_۰$ به‌دست‌آید، جواب معادله‌است. در ضمن، اگرمعادلهٔ مفروض را، معادلـه‌ای درجه دوم نسبت به x در نظر بگیریم، می‌توان، با توجه بـه‌جواب $(x_۰, y_۰, z_۰)$، جـواب جدیدی برای معادله به‌دست‌آورد.

۰۶۰۰۲ عدد $(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{۱۹۸۷}=a\sqrt{۳}+b\sqrt{۲}$ راهم‌درنظربگیرید.

۰۶۱۰۲ مفید است‌اگرعدد $a^۲+ab+b^۲$ ازمجموعهٔ M را به‌عبارت $a+b\omega$ مربوط کنیم و ضمن ضرب دو عبارت از این‌گونـه، $\omega^۲$ را $-۱-\omega$ به‌حساب‌آوریم؛ دراین صورت، درحالت خاص، خواهیم داشت:

$$(a+b\omega)(a-b\omega^۲)=a^۲+ab+b^۲$$

دراین‌جا، حرف ω، معرف عدد مختلط $\frac{۱+\sqrt{-۳}}{۲}$ وعدد $-\omega^۲=۱-\omega$

---

* کتاب **سرگرمی‌های جبر**، تألیف **پرلمان**، ترجمهٔ **پرویز شهریاری** را ببینید.ـم.

معرف مزدوج آن، عدد مختلط $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$ است.

۲۰.۶۰۲ می‌توان فرض کرد: $y = x! - 1$.

۲۶.۰۳ ۱) حل و بحث مسألهٔ ۷.۳، شکل ۱۸ را ببینید.

۳) اگر $n = \frac{ab}{c}$، آن‌وقت $\frac{c}{a} = \frac{b}{n}$.

۴) $m = a\sqrt{2} = \sqrt{a^2+a^2}$ و $n = a\sqrt{3} = \sqrt{m^2+a^2}$ می‌گیریم، دراین صورت

$$\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{am}{m+n}$$

۶) $m = a\sqrt{2}$ می گیریم، دراین صورت $a\sqrt[4]{2} = \sqrt{m.a}$.

۲۷.۰۳ حل مسألهٔ ۲.۳ را ببینید. در ۱):

$$\sqrt{b^2-a^2} = \sqrt{(b-a)(b+a)};$$

در ۲): $a\sqrt{3} = \sqrt{3a.a}$؛ در ۳): $a\sqrt{2} = \sqrt{2a.a}$، به‌نحوی که در همهٔ این حالت‌ها، مسأله منجر به ساختن واسطهٔ هندسی $\sqrt{ab}$ از دو پاره خط راست a و b می‌شود (شکل۱۸). برای این منظور، شکل ۱۸ را تکرار کنید، شعاع OK را درآن درنظربگیرید و پاره خط راست قرینهٔ آن را نسبت به KB پیداکنید.

۴) دراین جا می‌توان ازساختمان $a\sqrt{2}$ در۳) استفاده کرد.

۲۸.۰۳ مسألهٔ ۳.۳ را ببینید.

۲۹.۰۳ در این جا، بهتر است از روش مکان‌های هندسی استفاده کنیم (مسألهٔ ۴.۳ را ببینید). مکان هندسی وسط پاره خطهای راستی که یکی از دوانتهای آن‌ها برنقطهٔ مفروض و انتهای دیگرآن‌ها برمحیط دایرهٔ مفروض

واقع باشند، عبارت است ازمحیط یك دایره.

۳۰.۳-۳۱.۳. دراین دومسأله، بهتراست از روش تشابه استفاده‌کنیم (حل مسألهٔ ۳.۶ را ببینید).

۳۲.۳. بیشترین فاصلهٔ رأس مستطیل ازمبداء مختصات، روی خط راست $y=\pi+\frac{p}{۲}-۲x$ قراردارد.

۳۳.۳. $r\sqrt{\pi}=\frac{r\sqrt{\pi\times ۱}}{۱}$.

۳۴.۳. از اتحاد $\cos\varphi=۴\cos^{۳}\frac{\varphi}{۳}-۳\cos\frac{\varphi}{۳}$ استفاده کنید. $\cos\frac{\varphi}{۳}=x$ بگیرید، دراین صورت $۴x^{۳}=\cos\varphi+۳x$.

۳۵.۳-۳۶.۳. بهتراست برگشت ازدیوارهٔ‌خودشکل‌هارادرنظربگیریم: زاویه ومیزبیلیارد (مسألهٔ ۱۶.۳ را ببینید). درمسألهٔ ۳۶.۳، ابتدا میز بیلیاردی با اندازه‌های ۵×۳ را درنظربگیرید و شکل را رسم‌کنید.

۳۷.۳. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم‌کنید.

۳۸.۳. مسألهٔ ۸.۳ را ببینید.

۳۹.۳. ازمسألهٔ ۱۴.۳، با توجه به‌برابری $\frac{۱}{۱۵}=\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۶}$ استفاده کنید.

۴۰.۳. بیضی مکان‌هندسی نقطه‌هایی ازصفحه‌است که‌مجموع فاصله‌های آن‌ها، ازدونقطهٔ ثابت واقع برهمین صفحه، مقداری ثابت باشد. هذلولی، مکان هندسی نقطه‌هایی ازصفحه است که تفاضل فاصله‌های آن‌ها از دو نقطهٔ مفروض واقع برهمین صفحه، مقداری ثابت باشد.

۴۱.۳. ب) ثابت‌کنید، اگرپاره‌خطهای راست، روی خطهای راست مختلفی باشند، آن‌وقت، هرمحورتقارن‌اجتماع پاره خط‌ها، محورتقارن یکی ازپاره‌خطهای راست است.

۴۲.۳. بهتر است از روش تشابه استفاده کنید (مسألهٔ ۶.۳ را ببینید).

۴۳.۳-۴۴.۳. حل مسألهٔ ۱۰.۳ را ببینید.

۴۶.۳. ثابت کنید، اگر سه دایره دو به دو متقاطع باشند، وترهای مشترك دو به دوی آن‌ها، از یك نقطه می گذرند و، سپس، از مسألهٔ قبلی (۴۵.۳) استفاده کنید.

۴۷.۳. بین رأس‌های دوازده ضلعی منتظم، می‌توان با روش‌های مختلف، چهار رأس انتخاب کرد، به‌نحوی که همهٔ فاصله‌های دو به‌دوی آن‌ها، باهم فرق داشته باشند.

۴۸.۳. مسأله را می‌توان به‌سادگی، با استقرای روی n (تعداد خطهای راست) حل کرد.

۵۰.۳. مسألهٔ ۱۹.۳ را ببینید. مکان هندسی مرکزهای کره‌هایی که بر دو صفحهٔ متقاطع مماس‌اند، عبارت است از دو صفحهٔ عمود برهم. مکان هندسی مرکزهای کره‌هایی که برسه صفحهٔ دو به‌دو متقاطع مماس‌اند، عبارت است از برخورد دو زوج صفحه، یعنی چهار خط راست. تعداد نقطه‌هایی که از چهار صفحهٔ دو به‌دو متقاطع، به‌یك فاصله باشند، از هشت تجاوز نمی کند.

۵۱.۳. همهٔ بخش‌ها، چهاروجهی نیستند؛ بعضی از آن‌ها، هشت‌وجهی از آب درمی‌آیند (شکل ۶۷ را ببینید).

۵۲.۳. مسألهٔ ۱۹.۳ را ببینید.

۵۳.۳. الف) صفحه‌ای که از وسط قطر مکعب بگذرد و بر آن عمود باشد، مکان هندسی نقطه‌هایی است که از دو انتهای قطر به‌یك فاصله‌اند. روی یال‌های مکعب، چنین نقطه‌ها را پیدا کنید.

ب) قطر را به‌سه بخش برابر تقسیم و، برای $S(x)$، درهریك از این بخش‌ها، دستوری پیدا کنید. مساحت تصویر مقطع بر وجه مکعب، برابر $S(x).\sin\varphi$ است که، در آن، φ، زاویهٔ بین قطر و وجه مکعب است.

۵۴.۳. ثابت کنید، کنج‌های سه وجهی این چهار وجهی باهم برابرند (مسأله‌های ۲۴.۳ و ۲۵.۳ را ببینید).

۵۵.۳. ابتدا طرح مسطحهٔ این چندوجهی را رسم کنید (مسألهٔ ۲۳.۳ را ببینید).

۵۶.۳. ثابت کنید: الف) مساحت بخشی از سطح کره که به‌وسیلهٔ زاویهٔ دو وجهی این کنج جدا می‌شود، برابر است با 2α که، در آن، α، مقدار زاویهٔ دو وجهی است؛ ب) مثلث کروی عبارت است از اشتراك سه بخشی که به‌وسیلهٔ سه زاویهٔ دو وجهی کنج روی سطح کره به‌دست می‌آید.

۲۵.۴. حداکثر مقدار به‌ازای $a=b$ به‌دست می‌آید. می‌توان همهٔ مقدارهای لازم را، مثلاً، برحسب یکی از زاویه‌های حادهٔ مثلث، بیان کرد.

۲۶.۴. روشن است که $f(۰)=f(۱)=۱$. بنابراین، حداقل مقدار $f(x)$ به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ (جواب $f'(x)=۰$) به‌دست می‌آید. درضمن، این حداقل، نمی‌تواند از ۱ — کمتر باشد.

۲۷.۴. مسألهٔ ۵.۴ و حل آن را ببینید.

۲۸.۴. مجموع سه عدد کوچکتر، نمی‌تواند ازسه برابر واسطهٔ حسابی ۱۰ عدد، بیشتر باشد.

۳۰.۴. مسألهٔ ۳.۴ را ببینید. همهٔ مساحت‌ها را، برای بعضی از حالت‌های نمونه‌ای محاسبه کنید: اگر نقطهٔ مفروض، دریکی از رأس‌ها، یا وسط یکی ازضلع‌ها ویا درمحل برخورد میانه‌ها باشد.

۳۱.۴. بهتراست، اول، حداقل مقدارحاصل‌ضرب دوقطر را پیدا کنید.

۳۲.۴. حداقل و حداکثرقیمت یك خودکارچقدراست؟

$$\left(\frac{۱۱}{۹}<x<\frac{۱۶}{۱۳}\right)$$

۳۳.۴. می‌توان شبیه مسألهٔ ۶.۴، ب) حل کرد. از برابری زیر استفاده کنید:

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$$

∇ تبدیل $\sqrt{۳}$ به کسر مسلسل، منجر به تناوب می‌شود. تصادفی نیست که، برای فشار شبکهٔ برق، ۲۲۰ ولت و ۱۲۷ ولت را انتخاب کرده‌اند.

۳۴.۴. مسألهٔ ۸.۴ را ببینید.

۳۵.۴. مسألهٔ ۹.۴ را ببینید. اگر p را فاصله‌ای بگیریم که پیاده می‌تواند در فاصلهٔ برخورد با دو اتوبوس متوالی طی کند، آن‌وقت داریم:

$$۵p<۴<۷p،$$

$$۷p\leqslant ۷<۹p،$$

$$(x-۱)p\leqslant ۱۷<(x+۱)p$$

(x، تعداد مجهول اتوبوس‌هاست).

۳۷.۴. S را مجموع یازده عدد بگیرید. هرعدد، ریشه‌ای از معادلهٔ

$$x=(S-x)^۲$$

است، که بیش از دو ریشه ندارد. بنابراین، بین این ۱۱ عدد، نمی‌تواند بیش از دو عدد مختلف وجود داشته باشد.

۳۸.۴. مقدار مفروض را، به‌ازای $n=k+۱$ و $n=k$ بنویسید و نسبت آن‌ها را پیدا کنید. سپس، ببینید، این نسبت، به ازای چه‌مقدارهایی از k از واحد بزرگتر و به ازای چه‌مقدارهایی از k از واحد کوچکتر است (مسألهٔ ۱۳.۴ را ببینید).

۳۹.۴. بهتر است، در ابتدا، حالتی را درنظر بگیرید که همهٔ عددها باهم برابرند. برای این‌که مرز بالای n را به‌دست آورید، نابرابری‌های به صورت

$$a_i^۲+a_j^۲\geqslant ۲a_ia_j$$

را باهم جمع کنید که، در آن، a_kها ($۱\leqslant k\leqslant n$)، عددهایی هستند که در صورت مسأله از آن‌ها صحبت شده است.

۴۰.۴. مسألهٔ ۱۵.۴ را ببینید.

۴۱.۴. انتگرال‌های سمت چپ را می‌توان به‌عنوان مساحت مثلث‌های منحنی‌الضلع، واقع درزیروبالای نمودارتابع $y=\sin x$ نشان داد (مسألهٔ ۱۶.۴ را ببینید).

۴۲.۴. بهتراست از همان روش اثبات نابرابری‌های ۱۵.۴ استفاده کنید؛ دریکی ازحالت‌ها، باید نابرابری مثلثی را هم به‌حساب آورد.

۴۳.۴. الف) عددها را به‌صورت توان‌هایی با نماهای برابر درآورید و، سپس، پایه‌های این توان‌ها را، با هم مقایسه کنید.

ب) برای این‌که عددهای $۲^۹\times ۳^{۹۸}$ و $۳^۴\times ۲^{۱۴۸}$ را باهم مقایسه کنیم، کافی است $۲^۹$ را با $۳^۴$ و $۳^{۹۸}$ را با $۲^{۱۴۸}$ مقایسه کنیم (مقایسهٔ دوعدداخیر، به‌مقایسهٔ $\left(\frac{۹}{۸}\right)^{۴۹}$ و ۲ منجرمی‌شود؛ مسألهٔ ۴.۴ را هم ببینید).

ج) عددهای $\log_۵\left(\frac{۶}{۵}\right)$، $\log_۶\left(\frac{۶}{۵}\right)$ و $\log_۶\left(\frac{۷}{۶}\right)$ را باهم‌مقایسه کنید.

د) می‌توان ازاین برابری استفاده‌کرد:

$$۲\sin ۷^\circ \sin ۵^\circ = \cos ۲^\circ - \cos ۱۲^\circ$$

برای حل «ج» و «د» و «ه» مـی‌توان ازگزارهٔ زیراستفاده کرد: اگر تابع $\log f(x)$ تحدبی به‌طرف بالا داشته باشد(حل‌مسألهٔ ۱۸.۴را ببینید)، آن وقت $\frac{f(x)}{f(x-۱)} \geqslant \frac{f(x+۱)}{f(x)}$.

۴۴.۴. می‌توان شبیه حل‌مسألهٔ ۱۸.۴ استدلال کرد؛ برای الف) از تابع $f(x) = \frac{۱}{۱+x}$ و برای ب) ازتابع $f(x) = \log \sin x$ استفاده‌کنید.

۴۵.۴. درمجموع مورد نظر، تنها عددهای ۲ و ۳ وجود دارند.

۴۶.۴. حل مسألهٔ ۱۹.۴ را ببینید.

۴۷.۴. تعداد گـره‌های یـك شبکهٔ نامتناهی، شامل مثلث متساوی‌ـ الاضلاع به‌ضلع واحد را، در دایره‌ای به شعاع ۱۰ و مرکز یکی ازگره‌های شبکه، ارزیابی‌کنید (کافی است، تعدادگره‌های واقع دریك شش ضلعی منتظم را محاسبه‌کنیم؛ هرضلع شش ضلعی در امتداد خطهای راست شبکه است و طولی برابره ۱۰ دارد).

۴۸.۴. حل مسألهٔ ۲۳.۴ را ببینید.

۴۹.۴. قرینهٔ وتر را نسبت به‌هریك ازضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه

پیدا کنید؛ K' را قرینهٔ K نسبت به ضلعی‌که P روی آن است و H' را قرینهٔ H نسبت به ضلعی‌که Q روی‌آن است، بگیرید (K' و H' روی دو خط راست موازی قراردارند). مسأله منجربه‌این می‌شودکه، حداقل طول خط شکستهٔ $K'PQH'$ راپیداکنیم (موضع نقطه‌های PوQ، دراین مسأله، منحصربه‌فرد نیست؛ مسأله بی‌نهایت جواب، برای موضع P و Q دارد).

۵۰۰۴. مجذورفاصلهٔ بین دونقطه‌ای‌که، با سرعت‌های ثابت، روی‌یك خط راست حرکت می‌کنند، بـه‌وسیلهٔ یك سه‌جمله‌ای درجـهٔ دوم نسبت به زمان، بیان می‌شود (اگردستگاه محورهای مختصاتی را، که به‌یکی از این نقطه‌ها مربوط است، در نظر بـگیریم، می‌توانیم به سادگی، این نتیجه را به‌دست‌آوریم). با دردست‌داشتن سه‌مقدارسه‌جمله‌ای درجهٔدوم، ضریب‌های آن به‌دست می‌آید و، سپس، می‌نیمم‌آن محاسبه می‌شود.

۵۰۲۲. ب) در خانهٔ وسط و چهارخانـه‌ای که بـا آن در یك رأس مشترك‌اند، عددهای منفی و دربقیهٔ ۲۰ خانه، عددهای مثبت را قراردهید.

۵۰۲۳. حلزون‌نمی‌توانداز۴تا۱۲مترخزیده‌باشد(حل‌مسألهٔ ۵.۱۰را ببینید).

۵۰۲۴. حل مسألهٔ ۵.۳ را ببینید.

۵۰۲۵. حل مسألهٔ ۵.۵ را ببینید.

۵۰۲۶. الف) بهتر است ابتدا، حالت‌هایـی را در نظر بگیریدکه در اتوبوس، ۲، ۳ و ۴ مسافر وجود دارد.

ب) بعد ازمبادلهٔ سکه‌ها و پرداخت کرایه‌ها، باید دست‌کم یك سکه برای هرمسافرباقی بماند.

ج) بهتراست روشن‌کنید، بین این۱۵مسافر، چندنفرتنها یك سکهٔ۱۵ کوپکی دارند.

۵۰۲۷. بهتراست جـدولی تشکیل دهیدکـه، درآن، سطرها متناظر با رنگ‌ها و ستون‌ها متناظربا مدل‌ها باشند.

۵۰۲۸. حل مسألهٔ ۵.۶ را ببینید.

۵۰۲۹. الف) به‌کمك پرگاروخط‌کش، مثلثی رسم‌کنیدکه، از آن، دو

ضلع و زاویهٔ روبه‌رو به‌یکی ازضلع‌ها معلوم باشد.

ب) دومثلث درنظربگیرید، یکی با ضلع‌های ۱، a و $a^۲$ و دیگری با ضلع‌های a، $a^۲$ و $a^۳$. به‌ازای چه‌مقدارهایی‌ازa، این مثلث‌ها وجود دارند؟

۳۰.۵. ثابت کنید، یکی از زاویه‌های بین نیمسازهای مثلث، از ۶۰ درجه کمتر نیست (برای ایـن منظور، زاویه‌های بین نیمسازها را، بر حسب زاویه‌های مثلث بیان کنید). مساحت چهارضلعی را ارزیابی کنید که قطرهای آن، این نیمسازها باشند.

۳۲.۵. این مسأله، با برابری زیربستگی دارد:

$$۴+۴\times ۲^۳+۴\times ۳^۳+\ldots+۴k^۳=k^۲(k+۱)^۲$$

۳۳.۵. د) ابتدا کوشش کنید، تقسیم مثلث قائم‌الزاویه‌را، به‌دومثلث متساوی‌الساقین آزمایش کنید.

۳۵.۵. الف) لزومی ندارد چهارضلعی محدب باشد.

ب) طول هرپاره‌خط راست واقع در درون‌چهارضلعی، ازنصف محیط چهارضلعی تجاوزنمی‌کند.

۳۶.۵. ب) حالت‌هایی را بررسی کنیدکـه n، عددی زوج یا عددی فرد باشد (مسألهٔ ۱۶.۵ را ببینید).

۳۷.۵. الف) یك بیست‌وجهی‌سیمی را درنظربگیرید؛ مسألهٔ ۱۵.۵، ب) را ببینید.

ب) تعداد پاره‌خط‌ها را محاسبه‌کنید (مسألهٔ ۱۶.۵، ب) و ۱۷.۵، ب) را ببینید).

۳۸.۵. بهتراست هریك‌ازعددهای از۱ تا ۸۱را به‌صورت مجموعی‌از توان‌های عدد ۳، یعنی در دستگاه عدد نویسی به‌مبنای ۳، بنویسید.

۴۰.۵. اگر $q^k=\frac{۸}{۷}$ و $q^n=\frac{۹}{۸}$، آن وقت $۷^n\times ۹^k=۸^{n+k}$.

۴۱.۵. ب) هرکلید دوحالت دارد (روشن وخاموش)، بنابراین برای سه‌کلید روی هم هشت حالت مختلف وجود دارد که یکی از آن‌ها، متناظر

است با خاموش بودن همهٔ لامپ‌ها.

۵.۴۲ مسأله را با دایره‌های سیاه و دانش‌آموزان را با دایره‌های سفید مشخص کنید و هردانش‌آموز را با پاره‌خط، به‌مسأله‌هایی که حل کرده است وصل کنید. دراین‌صورت، پاره‌خط‌ها، یك یا چند دور بسته تشکیل می‌دهند.
د) درهردور، می‌توان دوروش انتخاب کرد؛ تعداددورها، از ۱۰ تجاوزنمی‌کند.

۵.۴۳ بهتراست ترتیب متناوب افسران را روی صفحهٔ Oxy که به مربع‌های ۵ × ۵ خانه‌ای تقسیم شده است بنویسید؛ درهریك ازاین مربع‌ها، ترتیب با ویژگی لازم تکرارمی‌شود. افسرهای هردرجه را می‌توان درطول خطهای راست موازی، ومثلاً باضریب زاویهٔ برابر ۱، وهرنوع تخصص را درجهت دیگری، مثلاً با ضریب زاویهٔ ۲، نوشت.

∇ این ترتیب‌لازم‌را، می‌توان به کمك میدان‌محدودی‌شامل‌باقی‌مانده‌های حاصل‌ازتقسیم‌بر۵هم به‌دست‌آورد. بحث مربوط به‌مسألهٔ ۲۰.۵ را ببینید.

۵.۴۴ الف) پاره‌خطی درنظر می‌گیریم، سه رأس هرم بیرونی را، خیلی نزدیك به‌یکی از دوانتهای این پاره‌خط و رأس چهارم را، نزدیك به انتهای دیگر آن می گیریم. در مورد هرم داخلی، دو رأس را در نزدیکی دوانتهای‌پاره‌خط‌ودورأس‌دیگررادرنزدیکی‌انتهای‌دیگرآن‌انتخاب می کنیم.
ب) این مسأله، تعمیمی از قضیهٔ زیراست: محیط چند ضلعی محدب، کوچکتراست ازمحیط هرچند ضلعی که آن را دربر گرفته است.

۵.۴۷ ایستگاه‌ها را در رأس‌های مکعب قرارمی‌دهیم.

۵.۴۸ دراین چند وجهی، همهٔ یال‌هایی که درجهت هم باشند، طولی برابردارند، و برای هردوجهت مختلف، درست دو وجه، متناظر با این دو جهت وجود دارد.

۵.۴۹ ب) چندجمله‌ای بخش‌الف) را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$C_x^1 + C_{x+y+1}^2$$

(بحث مسألهٔ ۱۶.۲ را ببینید).

۵.۵۰ مجموعهٔ مقدارهای‌چندجمله‌ای $x^2 + (xy - 1)^2$ را پیدا کنید.

۱۹.۶. مسألهٔ ۱.۶، ب) را ببینید.

۲۰.۶. ج) ثابت کنید، اگر در تبدیل کسر $\frac{n}{p}$ $(0<n<p)$، به کسر دهدهی، درجایی به دو رقم برابر و مجاور هم a برخورد کنیم، آن وقت، عدد طبیعی m وجود دارد، به‌نحوی که داشته باشیم: $\frac{m}{p}=0{,}aa\ldots$، یعنی نابرابری زیر برقرار باشد:

$$0<\frac{m}{p}-\frac{11}{100}a<\frac{1}{100}$$

مسألهٔ مفروض، به‌مسألهٔ زیر منجر می‌شود: عددهای اول p را طوری پیدا کنیدکه، به‌ازای هرعدد طبیعی $a\leqslant 9$، عدد دو رقمی که با دو رقم متوالی عدد $11pa$ تشکیل شده است، از $p-100$ تجاوز نکند.

۲۱.۶. دورهٔ تناوب را پیدا کنید.

۲۲.۶. ثابت کنید، اگر $a_n\geqslant 163$، آن وقت $a_{n+1}<a_n$. این باقی می‌ماند که حالت‌های $a_1\leqslant 162$ را بررسی کنیم.

۲۳.۶. مسألهٔ ۳.۶ را ببینید.

۲۴.۶. مسألهٔ ۲.۶ را ببینید.

۲۵.۶. مسألهٔ ۵.۶ را ببینید.

۲۶.۶. بحث‌های مربوط به‌مسأله‌های ۱۶.۶ و ۱۷.۶ را ببینید. اگر نمودارهای دو تابع $y=1-x^2$ و $y=x$ را رسم کنیم، باید رفتار دنبالهٔ (x_n) را، با توجه به رابطهٔ $x_{n+1}=1-x_n^2$، به‌ازای مقدارهای مختلف x_1، موردبررسی قراردهیم. پاسخ مسأله، بستگی به‌زوج یافرد بودن n دارد.

۲۷.۶. الف) تابع $f(x)=x(1-x)$، به‌ازای $0<x<\frac{1}{2}$، صعودی است. دربازهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$ داریم: $f(x)\leqslant\frac{1}{4}$ و $f\left(\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n+1}$. می‌توان ثابت کرد: $x_n<\frac{1}{n+2}$ به‌ازای $n>1$.

ب) بهتر است $x_n = \frac{۱}{۲} + h_n$ بگیریم.

۲۸.۶. با روش استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد که، $P_n(x)$، دارای n ریشه است. بـا درنظر گرفتن تناوب علامت‌های چند جمله‌ای $P_{n+۱}(x)$ در نقطه‌هایی که، در آن‌ها، $P_n(x)$ برابر صفر مـی‌شود، می‌توان ثابت کرد که، بین هردو ریشهٔ $P_n(x)$، ریشه‌ای از $P_{n+۱}(x)$ وجود دارد؛ به‌جزآن، اگر علامت $P_n(x)$ و $P_{n+۱}(x)$ را، بـه‌ازای مقدارهایی از x کـه، از لحـاظ قدر مطلق، به‌اندازهٔ کافی بزرگ‌اند، پیدا کنیم، می‌توان ثابت کرد که، $P_{n+۱}(x)$، ریشه‌ای کـوچکتر از همهٔ ریشه‌هـای $P_n(x)$، و ریشه‌ای بـزرگتر از همهٔ ریشه‌های $P_n(x)$ دارد.

۲۹.۶. الف) مسیر مورچه از پـاره‌خط‌های راستی درست شده است که، طول‌های آن‌ها، دو تصاعد هندسی نزولی نامتناهی تشکیل می‌دهند.

۳۰.۶. همهٔ مثلث‌ها، با هم متشابه‌اند.

۳۱.۶. از نابرابری $\sin x < x$، برای $x > ۰$، استفاده کنید.

۳۲.۶. ب) و ج). می‌توان ثـابت کـرد $a_n^۳ > ۳n$ و، سپس، تفاضل $a_n^۳ - ۳n$ را ارزیابی کرد.

۳۳.۶. هردوحکم را مـی‌توان بـا روش استقرای ریـاضی ثابـت کرد (مسألهٔ ۱۶.۶ را ببینید): اگر نابرابری‌های

$$۰ < ۲ - a_n < \left(\frac{۳}{۴}\right)^n$$

برای $n = k$ برقرار باشند، آن‌وقت برای $n = k + ۱$ هم بـرقرار خواهند بود.

۳۴.۶. می‌توان $q < ۱$ را پیدا کرد، به‌نحوی که (با آغاز ازمقداری برای n)، داشته باشیم: $a_{n+۱} < q \cdot a_n$.

۳۵.۶. ب) عددهای سه‌گانهٔ به‌صورت $k\tau^۲$، $k\tau$، k را درنظر بگیرید.

۳۶.۶. مجموع همهٔ فاصله‌های دو به‌دو را درنظر بگیرید. این مجموع، با جابه‌جایی افراد، تغییر نمی‌کند.

۳۸.۶. بهتر است، عددهای بین ۰ و ۱ را، همچون کسرهایی نامتناهی

درعدد نویسی بـه مبنای ۳، یعنی شامـل رقم‌های ۰، ۱، ۲ درنظربگیریم. عددهایی که در بخش «ج» دربارهٔ آن‌ها صحبت شده است، عددهایی هستند که درعدد نویسی به‌مبنای ۳، دارای بی‌نهایت رقم برابر ۰ و ۲ هستند، ولی حتی یك رقم برابر واحد ندارند.

۰۳۹.۶ ج) بـرای اثبات، بهتراست از روش دیـگری برای ساختن خط‌شکستهٔ دراکون استفاده کنیم (البته، باید ثابت کرد که، روش جدید، همان خط شکستهٔ قبلی را می‌دهد): در گام nام، هرضلع خط شکسته‌ای را که قبل از آن ساخته شده است، به‌عنوان وتر درنظرمی گیریم و مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی روی آن مـی‌سازیم، درضمن، یك درمیان، درسمت راست و درسمت چپ (به‌نحوی که، مثلث‌های مجاور، یکی‌ازدیگری، با دوران به اندازهٔ ۹۰ درجه دور رأس مشترك آن‌ها، به‌دست آید). ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه دراین مثلث‌ها، خط شکستهٔ جدیدی می‌سازند که اگرآن را به اندازهٔ ۴۵ درجه نسبت به‌نقطهٔ اولیه برگردانیم و به‌اندازهٔ $\sqrt{2}$ بارمتشابه با خودش بزرگ کنیم، می‌توانیم به‌گام $(n+1)$ام برویم.

د) راه حل‌را می‌شناسیم که براساس استفاده از عددهای‌مختلط درست قراردارد؛خیلی‌جالب‌خواهدبود،اگربتوانیدراه‌حل‌مقدماتی‌ساده‌ای پیدا کنید.

۰۴۰.۶ خانه‌های همهٔ‌خانواده‌ها را، به‌دوصورت‌بنویسید. روی‌نسخهٔ اول، خانه‌ها، طبق قاعده‌ای که در مسألـه داده شده است، در سال‌هـای ردیف فرد (سال اول، سال سوم، سال پنجم و غیره)، و روی نسخهٔ دوم، درسال‌های ردیـف زوج، رنگ می‌کنیم. هرخانـه را، به‌خانه‌هایی ازنسخهٔ دیگر وصل می‌کنیم که، درآن‌ها، دوستان‌آن زندگی می‌کنند. برای به‌دست آوردن طرح (که بـه‌آن، گراف دولپه‌ای گویند)، مـی‌توان ازهمان روشی استفاده کرد که درحل مسألهٔ ۷.۶ به‌کاربرده‌ایم.